高中數學 進階講義

二項式定理

陳清海　老師

信望愛文教基金會

lt99ok224 二項式定理

主題一、二項式定理

對於任意正整數 n，我們有下列的二項展開式：

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} y^1 + \cdots + C_r^n x^{n-r} y^r + \cdots + C_{n-1}^n x^1 y^{n-1} + C_n^n y^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n} C_r^n x^{n-r} y^r \quad .$$

【例題 1】【配合課本例 1】

寫出$(2x+y)^4$的展開式．

【詳解】

利用二項式定理，得

$$(2x+y)^4=C_0^4(2x)^4+C_1^4(2x)^3y^1+C_2^4(2x)^2y^2+C_3^4(2x)^1y^3+C_4^4y^4$$

$$=16x^4+32x^3y+24x^2y^2+8xy^3+y^4 .$$

【備註】

(2x + y)^4

$16\,x^4+24\,x^2\,y^2+8\,x\,y^3+y^4+32\,y\,x^3$

【類題 1】

寫出$(x+y)^5$的展開式．

【詳解】

利用二項式定理，得

$$(x+y)^5=C_0^5x^5+C_1^5x^4y^1+C_2^5x^3y^2+C_3^5x^2y^3+C_4^5x^1y^4+C_5^5y^5$$

$$=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5 .$$

【備註】

(x + y)^5

$x^5+10\,x^2\,y^3+5\,x\,y^4+y^5+10\,y^2\,x^3+5\,y\,x^4$

【例題 2】【配合課本例 2】

寫出$(3x-y)^4$的展開式．

【詳解】

將 3x 看成一項，(−y)看成一項，利用二項式定理，得

$$(3x-y)^4=\left[(3x)+(-y)\right]^4$$

$$=C_0^4(3x)^4+C_1^4(3x)^3(-y)^1+C_2^4(3x)^2(-y)^2+C_3^4(3x)^1(-y)^3+C_4^4(-y)^4$$

$=81x^4-108x^3y+54x^2y^2-12xy^3+y^4$.

【備註】

(3x − y)^4

$81\,x^4+54\,x^2\,y^2-12\,x\,y^3+y^4-108\,y\,x^3$

【類題 2】

寫出$(x-2y)^4$的展開式．

【詳解】

將 x 看成一項，(−2y)看成一項，利用二項式定理，得

$(x-2y)^4=\left[x+(-2y)\right]^4$

$=C_0^4x^4+C_1^4x^3(-2y)^1+C_2^4x^2(-2y)^2+C_3^4x^1(-2y)^3+C_4^4(-2y)^4$

$=x^4-8x^3y+24x^2y^2-32xy^3+16y^4$.

【備註】

(x − 2y)^4

$x^4+24\,x^2\,y^2-32\,x\,y^3+16\,y^4-8\,y\,x^3$

【例題 3】【配合課本例 3】

求$(2x-1)^8$展開式中x^3的係數．

Ans： −488

【詳解】

由二項式定理得知，$(2x-1)^8$展開式中的每一項皆形如

$C_r^8(2x)^{8-r}(-1)^r$，且其次數爲 8 − r．

當 8 − r3，即 r5 時，得出 x^3 項爲

$C_5^8(2x)^3(-1)^5=56\times8x^3\times(-1)=-448x^3$.

故 x^3 的係數爲−448．

【備註】

(2x − 1)^8

$256x^8-1024x^7+1792x^6-1792x^5+1120x^4-448x^3+112x^2-16x+1$

【類題 3】

求 $(x-2)^7$ 展開式中 x^4 的係數．

Ans： −280

【詳解】

由二項式定理得知，$(x-2)^7$ 展開式中的每一項皆形如

$C_r^7x^{7-r}(-2)^r$，且其次數爲 7－r．

當 7－r＝4，即 r_3 時，得出 x^4 項爲

$C_3^7x^4(-2)^3=35\times x^4\times(-8)=-280x^4$．

故 x^4 的係數爲−280．

【備註】

(x − 2)^7

$x^7-14x^6+84x^5-280x^4+560x^3-672x^2+448x-128$

【例題 4】【配合課本例 4】

求 $\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^8$ 展開式中的

(1) x^2 項係數

(2) x^3 項係數．

Ans：(1) 112，(2) 0

【詳解】

由二項式定理得知，$\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^8$ 展開式中的每一項皆形如

$C_r^8x^{8-r}\left(-\frac{2}{x^2}\right)^r=C_r^8\cdot x^{8-r}\cdot\frac{(-2)^r}{x^{2r}}=C_r^8\cdot(-2)^r\cdot x^{8-3r}$．

(1) 當 8－r＝2，即 r＝2 時，得 x^2 項爲

$C_2^8\cdot(-2)^2\cdot x^2=28\cdot4\cdot x^2=112x^2$．

故 x^2 的係數爲 112．

(2) 當 $8-r=3$，即 $r=\frac{5}{3}$ 時，因爲 r 不是 0 到 8 的整數，

所以展開式中無 x^3 項．故 x^3 項係數爲 0．

【備註】

$(x-\frac{2}{x^2})$^8

$x^8-16x^5+112x^2-\frac{448}{x}+\frac{1120}{x^4}-\frac{1792}{x^7}+\frac{1792}{x^{10}}-\frac{1024}{x^{13}}+\frac{256}{x^{16}}$

【類題 4】

求 $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$ 展開式中的

(1) x^3 項係數

(2) 常數項．

Ans：(1) −20，(2) 15

【詳解】

由二項式定理得知，$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$ 展開式中的每一項皆形如

$C_r^6\left(x^2\right)^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=C_r^6\cdot x^{12-2r}\cdot\frac{(-1)^r}{x^r}=C_r^6\cdot(-1)^r\cdot x^{12-3r}$ ．

(1) 當 $12-r=3$，即 $r=3$ 時，得 x^3 項爲

$C_3^6\cdot(-1)^3\cdot x^3=-20x^3$ ．故 x^3 的係數爲−20．

(2) 當 $12-3r=0$，即 $r=4$ 時，

得常數項爲 $C_4^6\cdot(-1)^4\cdot x^0=15$ ．

【備註】

$(x^2-\frac{1}{x})$^6

$x^{12}-6x^9+15x^6-20x^3+15-\frac{6}{x^3}+\frac{1}{x^6}$

【例題 5】【配合課本例 5】

求多項式 $f(x)=\left(1-x^2\right)+\left(1-x^2\right)^2+\left(1-x^2\right)^3+\cdots+\left(1-x^2\right)^{10}$ 的 x^4 項係數．

Ans：165

【詳解】
因為 f(x)是首項$(1-x^2)$，公比$(1-x^2)$的等比級數，
所以利用等比級數的求和公式，得

$$f(x)=\frac{(1-x^2)\left[1-(1-x^2)^{10}\right]}{1-(1-x^2)}=\frac{(1-x^2)-(1-x^2)^{11}}{x^2},$$

即 f(x)的 x^4 項係數就是 $(1-x^2)-(1-x^2)^{11}$ 的 x^6 項係數．

再由二項式定理，得知 $(1-x^2)^{11}$ 的 x^6 項為

$$C_3^{11}(1)^8(-x^2)^3=-165x^6,$$

即 $(1-x^2)-(1-x^2)^{11}$ 的 x^6 項為 $-(-165x^6)=165x^6$．

故 f(x)的 x^4 項係數為 165．

【備註】

$$\sum_{k=1}^{10}(1-x^2)^k$$

$$x^{20}-11x^{18}+55x^{16}-165x^{14}+330x^{12}-462x^{10}$$
$$+462x^8-330x^6+165x^4-55x^2+10$$

【類題 5】

求多項式 $f(x)=1+(1+x^2)+(1+x^2)^2+(1+x^2)^3+\cdots+(1+x^2)^{20}$ 的 x^4 項係數．

Ans：1330

【詳解】
因為 f(x)是首項 1，公比$(1+x^2)$的等比級數，
所以利用等比級數的求和公式，得

$$f(x)=\frac{1\cdot\left[1-(1+x^2)^{21}\right]}{1-(1+x^2)}=\frac{1-(1+x^2)^{21}}{-x^2}=\frac{(1+x^2)^{21}-1}{x^2},$$

即 f(x)的 x^4 項係數就是 $(1+x^2)^{21}-1$ 的 x^6 項係數．

再由二項式定理，得知 $(1+x^2)^{21}$ 的 x^6 項為

$C_3^{21}(1)^{18}\left(x^2\right)^3=1330x^6$，

即 $\left(1+x^2\right)^{21}-1$ 的 x^6 項爲 $1130x^6$ ．

故 f(x)的 x^4 項係數爲 1330 ．

【備註】

$$\sum_{k=0}^{20}(1+x^2)^k$$

$x^{40}+21x^{38}+210x^{36}+1330x^{34}+5985x^{32}+20349x^{30}$
$+54264x^{28}+116280x^{26}+203490x^{24}+293930x^{22}$
$+352716x^{20}+352716x^{18}+293930x^{16}+203490x^{14}$
$+116280x^{12}+54264x^{10}+20349x^{8}+5985x^{6}$
$+1330x^{4}+210x^{2}+21$

【例題】**【常考題】**

已知 $(1+x)^n$ 的展開式中，依 x 的升次排列，其第五項、第六項、第七項的係數成等差數列，求正整數 n 的值．

Ans：7 或 14

【詳解】

依題意，得 C_4^n, C_5^n, C_6^n 成等差數列，即

$$2C_5^n=C_4^n+C_6^n$$

$$\Rightarrow 2\cdot\frac{n!}{5!(n-5)!}=\frac{n!}{4!(n-4)!}+\frac{n!}{6!(n-6)!}$$

$$\Rightarrow 2\cdot\frac{1}{5\cdot(n-5)}=\frac{1}{1\cdot(n-4)(n-5)}+\frac{1}{30\cdot1}$$

$$\Rightarrow 12(n-4)=30+(n-4)(n-5)$$

$$\Rightarrow n^2-21n+98=0$$

$\Rightarrow$n＝7 或 14 ．

【類題 6】

設 $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，且 $3a_5+2a_6=a_7$，求正整數 n 的值．

Ans：26

【詳解】

$3a_5+2a_6=a_7$

$\Rightarrow 3C_5^n+2C_6^n=C_7^n$

$\Rightarrow 3\cdot\dfrac{n!}{5!(n-5)!}+2\cdot\dfrac{n!}{6!(n-6)!}=\dfrac{n!}{7!(n-7)!}$

$\Rightarrow 3\cdot\dfrac{1}{1\cdot(n-5)(n-6)}+2\cdot\dfrac{1}{6\cdot(n-6)}=\dfrac{1}{42\cdot 1}$

$\Rightarrow 126+14(n-5)=(n-5)(n-6)$

$\Rightarrow n^2-25n-26=0$

$\Rightarrow$n＝26 或 -1（不合）.

故 n＝26．

主題二、二項式定理的應用

設 n 爲正整數．

(1) $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n$ ．

(2) $C_0^n + C_2^n + C_4^n + \cdots = C_1^n + C_3^n + C_5^n + \cdots = 2^{n-1}$ ．

【例題 7】【配合課本例 6】

求下列各式的值：

(1) $C_0^{10}+C_1^{10}+C_2^{10}+\cdots+C_{10}^{10}$.

(2) $C_0^{10}+C_2^{10}+C_4^{10}+C_6^{10}+C_8^{10}+C_{10}^{10}$.

(3) $C_1^{10}+C_3^{10}+C_5^{10}+C_7^{10}+C_9^{10}$.

Ans：(1) 1024，(2) 512，(3) 512

【詳解】

(1) 將 $(x+y)^{10}$ 的展開式

$$(x+y)^{10}=C_0^{10}x^{10}+C_1^{10}x^9y^1+C_2^{10}x^8y^2+\cdots+C_{10}^{10}y^{10}$$

中的 x 與 y 都用 1 代入，得

$(1+1)^{10}=C_0^{10}+C_1^{10}+C_2^{10}+\cdots+C_{10}^{10}$，

即 $C_0^{10}+C_1^{10}+C_2^{10}+\cdots+C_{10}^{10}=2^{10}=1024\cdots$①

(2) 將 $(x+y)^{10}$ 的展開式中的 x 用 1，y 用−1 代入，得

$(1-1)^{10}=C_0^{10}-C_1^{10}+C_2^{10}-\cdots+C_{10}^{10}$，

即 $C_0^{10}-C_1^{10}+C_2^{10}-\cdots+C_{10}^{10}=0\cdots$②

將①與②相加，可推得

$$C_0^{10}+C_2^{10}+C_4^{10}+C_6^{10}+C_8^{10}+C_{10}^{10}=\frac{2^{10}+0}{2}=2^9=512 .$$

(3) 將①減去②，可推得

$$C_1^{10}+C_3^{10}+C_5^{10}+C_7^{10}+C_9^{10}=\frac{2^{10}-0}{2}=2^9=512 .$$

【類題 7】

求滿足不等式 $200<C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n<300$ 的正整數 n .

Ans：8

【詳解】

因爲 $C_0^n+C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n=2^n$，所以原式可改寫爲

$200<2^n-C_0^n<300 \Rightarrow 200<2^n-1<300$，即 $201<2^n<30$.

又因爲 $2^7=128$，$2^8=256$，$2^9=5$，所以 n＝8 .

【例題 8】【常考題】

已知 $\log 2=0.3010,\ \log 3=0.4771$，求滿足不等式

$1-\frac{1}{3}C_1^n+\frac{1}{9}C_2^n-\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^n C_n^n<\frac{1}{5000}$ **的最小正整數 n .**

Ans：22

【詳解】

將 $(x+y)^n$ 的展開式

$$(x+y)^n=C_0^n x^n+C_1^n x^{n-1}y^1+C_2^n x^{n-2}y^2+\cdots+C_n^n y^n$$

中的 x 用 1，y 用 $-\frac{1}{3}$ 代入，得

$$\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^n=1-\frac{1}{3}C_1^n+\frac{1}{9}C_2^n-\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^n C_n^n,$$

即 $1-\frac{1}{3}C_1^n+\frac{1}{9}C_2^n-\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^n C_n^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

因此，原不等式可改寫爲 $\left(\frac{2}{3}\right)^n<\frac{1}{5000}$.

兩邊取對數，得

$$\log\left(\frac{2}{3}\right)^n<\log\frac{1}{5000}$$

$$\Rightarrow n(\log 2-\log 3)<-\log 5000$$

$$\Rightarrow n(0.3010-0.4771)<-(3+0.6990)$$

$\Rightarrow n > \dfrac{3.6990}{0.1761} = 21.\cdots$

故 n＝22．

【類題 8】

求 $1-2C^6_1+4C^6_2-8C^6_3+16C^6_4-32C^6_5+64C^6_6$ **的值．**

Ans：1

【詳解】

將 $(x+y)^6$ 的展開式

$$(x+y)^6 = C^6_0 x^6 + C^6_1 x^5 y^1 + C^6_2 x^4 y^2 + \cdots + C^6_6 y^6$$

中的 x 用 1， y 用−2 代入，得

$$(1+(-2))^6 = C^6_0 + C^6_1(-2)^1 + C^6_2(-2)^2 + \cdots + C^6_6(-2)^6 \ .$$

整理得 $1-2C^6_1+4C^6_2-8C^6_3+16C^6_4-32C^6_5+64C^6_6 =$ ．

【例題 9】【常考題】

求 $(1.03)^5$ **的近似值到小數點後第三位（第四位以下四捨五入）．**

Ans：1.159

【詳解】

利用二項式定理將 $1.03^5=(1+0.03)^5$ 展開得到

$$1.03^5 = (1+0.03)^5$$

$$= C^5_0\cdot 1^5\cdot 0.03^0 + C^5_1\cdot 1^4\cdot 0.03^1 + C^5_2\cdot 1^3\cdot 0.03^2 + C^5_3\cdot 1^2\cdot 0.03^3 + C^5_4\cdot 1^1\cdot 0.03^4 + C^5_5\cdot 1^0\cdot 0.03^5$$

$$= C^5_0\cdot 0.03^0 + C^5_1\cdot 0.03^1 + C^5_2\cdot 0.03^2 + C^5_3\cdot 0.03^3 + C^5_4\cdot 0.03^4 + C^5_5\cdot 0.03^5$$

$$\approx 1+5\cdot 0.03+10\cdot 0.0009 = 1.159 \ .$$

【類題 9-1】

求$(0.99)^{10}$的近似值到小數點後第四位（第五位以下四捨五入）．

Ans：0.9044

【詳解】

利用二項式定理，得

$(0.99)^{10}=(1-0.01)^{10}$

$=C_0^{10}+C_1^{10}\cdot(-0.01)^1+C_2^{10}\cdot(-0.01)^2+C_3^{10}\cdot(-0.01)^3+\cdots+C_{10}^{10}\cdot(-0.01)^{10}$

$\approx 1-0.1+0.0045-0.00012=0.90438\approx 0.9044$

故所求為 0.9044．

【類題 9-2】

求11^{18}除以 1000 的餘數．

Ans：481

【詳解】

利用二項式定理將$11^{18}=(1+10)^{18}$展開得到

$11^{18}=(1+10)^{18}$

$=C_0^{18}\cdot 1^{18}+C_1^{18}\cdot 1^{17}\cdot 10^1+C_2^{18}\cdot 1^{16}\cdot 10^2+C_3^{18}\cdot 1^{15}\cdot 10^3+\cdots+C_{18}^{18}\cdot 10^{18}$

$=1+180+15300+1000\left(C_3^{18}+C_4^{18}\cdot 10+\cdots+C_{18}^{18}\cdot 10^{15}\right)$

$=481+1000\left(15+C_3^{18}+C_4^{18}\cdot 10+\cdots+C_{18}^{18}\cdot 10^{15}\right)$

故 11^{18}除以 1000 的餘數為 481．

【例題 10】【常考題】

求$x^{100}+1$除以$(x-1)^2$的餘式．

Ans：100x－98

【詳解】

利用二項式定理將 $x^{100}=((x-1)+1)^{100}$ 展開得到

$((x-1)+1)^{100}$

$=C_0^{100}(x-1)^{100}+C_1^{100}(x-1)^{99}+\cdots+C_{98}^{100}(x-1)^2+C_{99}^{100}(x-1)^1+C_{100}^{100}\cdot 1^{100}$

$=(x-1)^2\left[C_0^{100}(x-1)^{98}+C_1^{100}(x-1)^{97}+\cdots+C_{98}^{100}\right]+C_{99}^{100}(x-1)+C_{100}^{100}$，

因此， $x^{100}+1$除以 $(x-1)^2$ 的餘式爲

$C_{99}^{100}(x-1)+C_{100}^{100}+1=100(x-1)+1+1=100x-98$.

【類題 10】

求 x^8除以 $(x-1)^3$的餘式．

Ans：$28x^2-48x+21$

【詳解】

利用二項式定理將 $x^8=((x-1)+1)^8$ 展開得到

$((x-1)+1)^8$

$=C_0^8(x-1)^8+C_1^8(x-1)^7+\cdots+C_5^8(x-1)^3+C_6^8(x-1)^2+C_7^8(x-1)^1+C_8^8\cdot 1^8$

$=(x-1)^3\left[C_0^8(x-1)^5+C_1^8(x-1)^4+\cdots+C_5^8\right]+C_6^8(x-1)^2+C_7^8(x-1)+C_8^8$

因此， x^8 除以 $(x-1)^3$的餘式爲

$C_6^8(x-1)^2+C_7^8(x-1)+C_8^8=28(x-1)^2+8(x-1)+1=28x^2-48x+21$.

lt99ok224 重要精選考題

基礎題 ▶▶▶

1. 寫出 $(2a-b)^4$ 的展開式．

Ans：$16a^4-32a^3b+24a^2b^2-8ab^3+b^4$

【詳解】

$(2a-b)^4$

$=C_0^4(2a)^4+C_1^4(2a)^3(-b)+C_2^4(2a)^2(-b)^2+C_3^4(2a)(-b)^3+C_4^4(-b)^4$

$=16a^4-32a^3b+24a^2b^2-8ab^3+b^4$。

2. 求 $(3a^2-b)^5$ 展開式中 a^4b^3 的係數．

Ans：-90

【詳解】

一般項為 $C_r^5(3a^2)^{5-r}(-b)^r$，

取 $r=3$ 得此項為

$C_3^5(3a^2)^2(-b)^3=10\cdot 9a^4\cdot(-b)^3=-90a^4b^3$，

即 a^4b^3 的係數為 -90。

3. 求 $\left(2x^3-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$ 展開式中的常數項．

Ans：-40

【詳解】

一般項為 $C_r^5(2x^3)^{5-r}(-x^{-2})^r$，

x 的次數為 $3(5-r)-2r=0$，即 $r=3$，

代入得常數項為 $C_3^5\times 2^2\times(-1)^3=-40$。

4. 已知 $\left(2x+\dfrac{a}{x}\right)^5$ **的展開式中，** x^3**項係數爲** -80**，求實數 a 的值．**

Ans： -1

【詳解】

一般項爲 $C_r^5(2x)^{5-r}(ax^{-1})^r$，

x 的次數爲(5－r)－r＝3，即 r＝1，

代入得常數項爲 $C_1^5\times 2^4\times a$ ＝80a＝-80，

故 a＝-1。

5. 設 $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$**，且** $2a_4=3a_{n-6}$**，求正整數 n 的值．**

Ans： 9

【詳解】

$2a_4=3a_{n-6}$

$\Rightarrow$ 2．C_4^n＝3．C_{n-6}^n

$$\Rightarrow \frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}=\frac{3n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$\Rightarrow$ 60＝3(n－4)(n－5)

$\Rightarrow$ n^2－9n＝0

$\Rightarrow$ n＝9 或 n＝0(不合)。

6. 求 $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$**的展開式中的** x^3**項係數．**

Ans： 330

【詳解】

$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$的

展開式中的 x^3項係數爲

$C_3^3+C_3^4+C_3^5+C_3^6+\cdots\cdots+C_3^9+C_3^{10}$

$=C_4^4+C_3^4+C_3^5+C_3^6+\cdots\cdots+C_3^9+C_3^{10}$

$=C_4^5+C_3^5+C_3^6+\cdots\cdots+C_3^9+C_3^{10}$

$=\cdots\cdots\cdots$

$=C_4^{10}+C_3^{10}$

$=C_4^{11}=\dfrac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1}$

$=330$。

【另解】

$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$

$=\dfrac{(1+x)[1-(1+x)^{10}]}{1-(1+x)}=\dfrac{(1+x)^{11}-(1+x)}{x}$ ，

$(1+x)^{11}$ 展開式中 x^4 項的係數 $C_4^{11}=330$ 即為所求。

7. **求複數 $(2+i)^5$ 的實部及虛部．**

Ans：實部為−38，虛部為 41

【詳解】

$(2+i)^5=C_0^5 2^5+C_1^5 2^4(i)+C_2^5 2^3(i^2)+C_3^5 2^2(i^3)+C_4^5 2(i^4)+C_5^5(i^5)$

實部為 $1\times2^5-10\times2^3+5\times2=32-80+10=-38$。

虛部為 $5\times2^4-10\times2^2+1=80\times40+1=41$。

8. **求 11^{13} 的百位數字與十位數字．**

Ans：百位數字為 9，十位數字為 3

【詳解】

$11^{13}=(10+1)^{13}$

$=10^{13}+13\cdot10^{12}+\ldots\ldots+78\cdot10^2+13\cdot10+1$

$=k\cdot1000+7931$，

百位數字為 9，十位數字為 3，個位數字為 1。

進階題 ▶▶▶

9. 已知在$(1+2x)^n$的展開式中，**x^3**項的係數等於x項係數的8倍，

求正整數 n 的值．

Ans：5

【詳解】

x^3項的係數爲$C_3^n\times 2^3$，x項係數爲$C_1^n\times 2$，故

$$\frac{8\times n(n-1)(n-2)}{3\times 2\times 1}=\frac{8\times 2n}{1}$$

$\Rightarrow$ (n－1)(n－2)＝12

$\Rightarrow$ n＝5。

10. 設$C_1^n+2\cdot C_2^n+4\cdot C_3^n+\cdots+2^{n-1}\cdot C_n^n=3280$，**求正整數 n 的值．**

Ans：8

【詳解】

根據二項式定理

$(x+y)^n=C_0^nx^n+C_1^nx^{n-1}y^1+\cdots+C_r^nx^{n-r}y^r+\cdots+C_{n-1}^nx^1y^{n-1}+C_n^ny^n$，

令 x＝1，y＝2 代入得

$(1+2)^n=C_0^n+C_1^n2^1+\cdots+C_r^n2^r+\cdots+C_{n-1}^n2^{n-1}+C_n^n2^n$

$=C_0^n+2(C_1^n+2C_2^n+2^2C_3^n+\cdots\cdots+2^{n-1}C_n^n)$

$=1+2\times 3280=6561=3^8$，

故得 n＝8。

11. 已知$P_4^4+P_4^5+P_4^6+\cdots+P_4^{19}=k\cdot C_5^{20}$，**求 k 的值．**

Ans：24

【詳解】

$P_4^4+P_4^5+P_4^6+\cdots+P_4^{19}$

$=4!(C_4^4+C_4^5+C_4^6+\cdots+C_4^{19})=24\times C_5^{20}$，

故 k＝24。

12. **求 $\left(x^2+\left(y+z\right)\right)^6$ 展開式中，$x^4y^2z^2$ 的係數．**

Ans：90

【詳解】

$\left(x^2+\left(y+z\right)\right)^6$ 中，x^4 項爲 $C_4^6x^4(y+z)^4$，

$x^4y^2z^2$ 的係數 $C_4^6\times C_2^4=\dfrac{6!}{2!4!}\times\dfrac{4!}{2!2!}=\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$。

13. **求 $\left(1+2x-x^3\right)^{10}$ 展開式中的 x^3 項係數．**

Ans：950

【詳解】

$\left(1+2x-x^3\right)^{10}$

$=(1+2x)^{10}-C_1^{10}(1+2x)^9\cdot x^3+C_2^{10}(1+2x)^8\cdot x^6-\cdots\cdots$，

x^3 項的係數爲 $C_3^{10}\cdot 2^3+C_1^{10}=120\times 8-10=950$。