

數學 2 進階講義

等比數列的一般項

景美女中 · 李冠達老師



信望愛文教基金會

4-1-2 等比數列的一般項

定理證明或說明

1. 數列的意義：

- (1) 將所有數值依序排成一列，就是數列。
- (2) 該數列中，我們稱每一個數為[項]，排在首位的項稱為[首項]或[第 1 項]，排在第 2 位的項稱為第 2 項，依此類推，中間某一項稱為第 k 項，直到最後一項稱為第 n 項。
- (3) 如果一個數列為有限多項，我們稱為有限數列；如果一個數列為無限多項，則稱為無限數列。其中，有限數列的最後一項，稱為末項。

2. 數列的符號

- (1) 有限數列： $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots, a_n$ ，共有 n 項。
- (2) 無限數列： $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$ ，沒有最後一項。

不管有限或無限數列，亦可表示成 $\langle a_k \rangle$ ，其中 a_k 稱為該數列的一般項（通式）。

常見的兩種數列為等差數列與等比數列。

3. 等比數列

等比數列： $\frac{a_k}{a_{k-1}} = r$ （後項 a_k 除以前項 a_{k-1} 為固定值 r ）

注意事項

1. 等比數列的一般式 $a_k = ar^{k-1}$ 表示法要熟練，並且能夠解讀該數列呈現模式。
2. 能夠解讀並計算等差數列之間的關係，如假設等差數列為 a 、 ar 、 ar^2 。
3. 等比中項問題要注意， a, b, c 三數成等比數列，則 $ac = b^2$ 。

關鍵字

等比數列

例題 1

設 $3, (-3\sqrt{3}), 9, \dots, 243$ 是一個等比數列，求：

- (1) 公比。
- (2) 第 6 項的值。
- (3) 243 是數列的第幾項？

Ans :

(1) 觀察該等比數列可得首項為 $a = 3$ ，

$$\text{公比為 } r = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = \frac{9}{-3\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

(2) 第 6 項 $a_6 = ar^5 = 3 \times (-\sqrt{3})^5 = -27\sqrt{3}$

(3) 假設第 k 項為 243，即 $a_k = 3 \times (-\sqrt{3})^{k-1} = 243$

$$(-\sqrt{3})^{k-1} = 81 = 3^4 = (-\sqrt{3})^8$$

可得 $k-1=8$ ，所求 $k=9$ ，第 9 項為 243。

例題 2

已知一等比數列，設第 n 項為 a_n ，已知 $a_4 = 5$ ， $a_9 = 20\sqrt{2}$ ，求 $a_{16} = ?$

Ans :

假設首項為 a ，公比為 r （且 $r \neq 0$ ）

依題意可得：

$$\begin{cases} a_4 = ar^3 = 5 \\ a_9 = ar^8 = 20\sqrt{2} \end{cases}$$

兩式相除後，可得 $\frac{ar^3}{ar^8} = \frac{5}{20\sqrt{2}}$

$$r^5 = 4\sqrt{2} = 2^{\frac{5}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^5$$

得到公比 $r = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

代回 $a_4 = ar^3 = 5$ ，可得 $a = \frac{5}{2\sqrt{2}}$

$$\text{最後所求 } a_{16} = ar^{15} = \frac{5}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2})^{15} = 320$$

例題 3

設四正數 a, b, c, d 成等比數列，若 $a+b=28$ ， $c+d=63$ ，則公比 $r=?$

Ans :

因為四正數 a, b, c, d 成等比數列，因此可依序設 a, ar, ar^2, ar^3 ，

$$\begin{cases} a+ar=28 \\ ar^2+ar^3=63 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1+r)=28 \dots\dots\dots(1) \\ ar^2(1+r)=63 \dots\dots(2) \end{cases}$$

由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得 $\frac{1}{r^2} = \frac{28}{63} = \frac{4}{9}$ ， $r = \pm \frac{3}{2}$ （負不合，因為 a, b, c, d 為正數）

故公比 $r = \frac{3}{2}$ 。

例題 4

有三個不同的數 a, b, c 成等比數列，且 $a+b, b+c, c+a$ 三數成等差數列，則 a, b, c 的公比為何？

Ans :

因為 a, b, c 成等比數列，因此根據等比中項性質 $ac = b^2$ ，

又 $a+b, b+c, c+a$ 三數成等差數列，

依等差中項性質 $(a+b)+(c+a)=2(b+c)$ 得 $b+c=2a$

$$\text{由 } b+c=2a=2\frac{b^2}{c} \Rightarrow 2b^2-bc-c^2=0$$

得 $(2b+c)(b-c)=0$ ，故 $b = -\frac{c}{2}$ 或 $b=c$ （不合，因為三個不同的數）

公比為 $r = \frac{c}{b} = -2$

例題 5

設 a, b, c 三數成等比數列 ($a > b > c$)，且三數之和為 38，若此三數依序加 2、5、6 後，三數成等差數列，求序組 (a, b, c) 之值。

Ans :

$$\text{由題意列出 } \begin{cases} a+b+c=38 \\ (a+2)+(c+6)=2(b+5) \end{cases}$$

$$\text{整理後得 } \begin{cases} a+c=38-b \\ a+c=2b+2 \end{cases} \text{ 可解出 } 38-b=2b+2 \Rightarrow b=12$$

$$\text{再由 } \begin{cases} a+c=26 \\ a \times c = b^2 = 144 \end{cases}, \text{ 以 } c=26-a \text{ 代入 } ac=144$$

$$\text{得 } a(26-a)=144 \Rightarrow a^2 - 26a + 144 = 0$$

$$\Rightarrow (a-18)(a-8) = 0$$

$$\Rightarrow a=18 \text{ 或 } 8 \text{ (不合, 因為 } a > b > c \text{)}$$

故序組 (a, b, c) 解為 $(18, 12, 8)$ 。

例題 6

有四整數 a, b, c, d ，若 a, b, c 成等差， b, c, d 成等比，且 $a+d=11$ ， $b+c=10$ ，則此四數中最大者為多少？

Ans :

因為 b, c, d 成等比數列，可假設 $c=br$ ， $d=br^2$

$$\text{再由 } a, b, c \text{ 成等差, 列出聯立方程組 } \begin{cases} 2b = a + br \dots\dots(1) \\ a + br^2 = 11 \dots\dots(2) \\ b + br = 10 \dots\dots(3) \end{cases}$$

$$\text{由(1)+(3)得 } 3b = a + 10, \text{ 因此 } a = 3b - 10 \dots\dots\dots(4)$$

$$\text{由(3)可得 } r = \frac{10-b}{b} \dots\dots\dots(5)$$

$$\text{最後以(4)、(5)代入(2)解得 } 4b^2 - 41b + 100 = 0$$

$$(b-4)(4b-25) = 0 \text{ 得 } b=4$$

$$\text{推出 } r = \frac{10-b}{b} = \frac{3}{2}; a = 3b - 10 = 2; c = br = 6; d = br^2 = 9$$

因此此四數中最大者為 $d=9$ 。



溫故知新

習題 1

計算等比數列 $x-4, x+1, 2x+2, \dots$ 且公比為正數，試求第 4 項之值。(不可以 x 表示)

習題 2

設四相異正數 $4, a, b, 12$ 中，前三項成等比數列，後三項成等差數列，試求出數對 (a, b) 之值。

習題 3

五個實數 a, b, c, d, e 成等比數列，已知 $a+b=6$ ， $d+e=48$ ，試求 c 之值。

習題 4

設三正整數成一等比數列，其和為 52，倒數和為 $\frac{13}{36}$ ，則這三正數中最大者為何？

習題 5

有三正數成等差數列，其和為 36，若各數依次加 1、4、43 後，則成為一等比數列，求此三數依序為何？

習題 6

【學測 91】

某公司民國 85 年營業額為 4 億元，民國 86 年營業額為 6 億元，該年的成長率為 50%，87、88、89 三年的成長率皆相同，且民國 89 年的營業額為 48 億元，則該公司 89 年的成長率為多少%。



解答與解析

習題 1 : 40

習題 2 : $(a, b) = (6, 9)$

習題 3 : 8

習題 4 : 36

習題 5 : 3, 12, 21

習題 6 : 100