數學 4 進階講義

雙曲線的定義、標準式與正焦弦長

淡水商工・方志元　老師

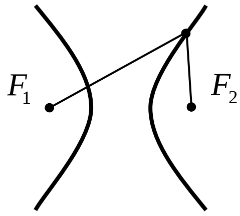
信望愛文教基金會

14-3-1~3　雙曲線的定義、標準式與正焦弦長

定理敘述

(1)雙曲線的定義：

如右圖給定平面上相異兩定點 F_1 、 F_2 ，



若點 P 為平面上另一點，

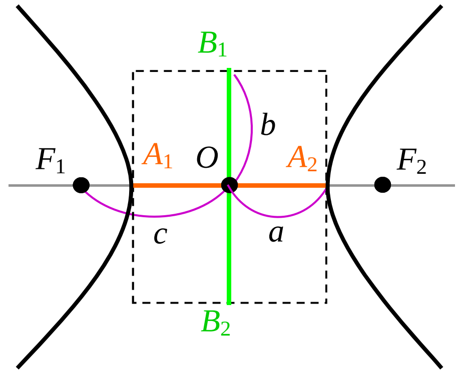
使得 P 到此兩點的距離差的絕對值為

定值 $2a$（ $0<2a<\overline{F_1F_2}$ ），即 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$ ，

則所有 P 點所成的圖形稱為雙曲線，其中 F_1 、 F_2 稱為焦點。

(2)雙曲線的各元素名稱

如右圖所示，我們給定各部名稱如下：



(a) O 稱為雙曲線的中心。

(b) F_1 、 F_2 為此雙曲線的焦點，長度為 $\overline{F_1F_2}=2c$ 。

(c) 線段 $\overline{A_1A_2}$ 為貫軸，其中 A_1 、 A_2 稱為

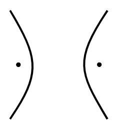
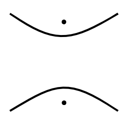
貫軸頂點且其長度 $\overline{A_1A_2}=2a$ 。

(d) 線段 $\overline{B_1B_2}$ 為共軛軸，其中 B_1 、 B_2 為

共軛軸頂點且其長度 $\overline{B_1B_2}=2b$ ，其中 $b=\sqrt{c^2-a^2}$ （即 $c^2=a^2+b^2$ ）。

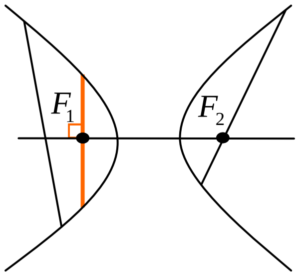
(3)雙曲線的標準式：

依圖形可分為左右型及上下型

	左右型	上下型
圖形		
標準式	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$
中心	(h,k)	(h,k)
貫軸長	$2a$	$2a$
共軛軸長	$2b$	$2b$
兩焦點距離	$2c$	$2c$

	左右型	上下型
焦點	$(h\pm c,k)$	$(h,k\pm c)$
貫軸頂點	$(h\pm a,k)$	$(h,k\pm a)$

(4)如下圖所示，過雙曲線上任兩點所連直線為稱為弦；若弦通過焦點，則稱為焦弦；若一弦通過焦點，且與貫軸垂直，則稱為正焦弦（圖中紅色直線），其長度為$\dfrac{2b^2}{a}$



定理證明或說明

(1)中心點在原點的雙曲線標準式：

設雙曲線的兩焦點為$F_1(c,0)$、$F_2(-c,0)$，$c>0$，貫軸長為$2a$（$a>0$），

$P(x,y)$為雙曲線上一點滿足$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$，

即　$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a$

去絕對值得　$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$

移項得　$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$

兩邊平方得　$(x-c)^2+y^2=(x+c)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2$

乘開並整理得　$cx+a^2=\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

兩邊平方得　$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2\left[(x+c)^2+y^2\right]$

乘開並整理得　$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$

令$b^2=c^2-a^2$得　$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

同除以a^2b^2得　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（左右型）

同理可證，當焦點改為$(0,c)$、$(0,-c)$，其餘條件不變時，

可得雙曲線的方程式為$-\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$（上下型），請讀者自證。

(2)中心點為$O(h,k)$的雙曲線標準式：

曲前述可知，當中心點在原點時，左右型雙曲線的標準式為

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

若將整個圖形的中心點移到(h,k)，設新的坐標為(x',y')，則新方程式為

$\dfrac{(x')^2}{a^2}-\dfrac{(y')^2}{b^2}=1$，其中$x'=x+h$，$y'=y+k$

移項得 $x'=x-h$，$y'=y-k$，代回新方程式得

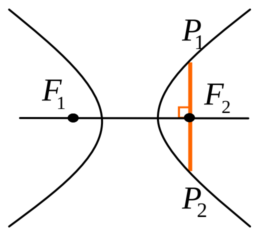
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

同理，當上下型雙曲線的中心點在$O(h,k)$時，標準式為$-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$。

(3)雙曲線的正焦弦長：

如右圖所示，設此雙曲線標準式為$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，兩焦點

為$F_1(c,0)$、$F_2(-c,0)$，$c>0$，則$\overline{P_1P_2}$為正焦弦。



令$x=c$代入方程式，得 $\dfrac{c^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

解方程式得$y=\pm\dfrac{b^2}{a}$，即$P_1(c,\dfrac{b^2}{a})$、$P_2(c,-\dfrac{b^2}{a})$

故正焦弦長為$\dfrac{2b^2}{a}$。

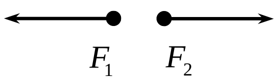
注意事項

(1)給定平面上相異兩定點F_1、F_2，設點P為平面上另一點，

使得P到此兩點的距離差的絕對值為定值$2a$，即$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$，則：

(a)當$0<2a<\overline{F_1F_2}$時，P點所成圖形為一雙曲線。

(b)當$2a=\overline{F_1F_2}$時，P點所成圖形為兩射線，如下圖所示。



(c)當 $2a > \overline{F_1F_2}$ 時，沒有圖形。

(2)貫軸不一定比共軛軸大。

(3)當標準式的等號右邊固定為 1 時，利用負號的位置判斷圖形以及 a、b 的值。

(a)左右型 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$：負號在含有 y 這一項，此時的分母即為 b^2。

(b)上下型 $-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$：負號在含有 x 這一項。

關鍵字

雙曲線、標準式、貫軸、共軛軸、正焦弦

例題 1

已知雙曲線的兩焦點為 $F_1(5,1)$、$F_2(-5,1)$，且貫軸長為 6，試求此雙曲線的標準式及正焦弦長。

Ans：

由兩焦點 $F_1(5,1)$、$F_2(-5,1)$ 可知，此雙曲線為左右型，中心點為 $(0,1)$，$c=5$；

又貫軸長為 $2a=6$，故 $a=3$；由 $c^2=a^2+b^2$ 可知 $b=4$。

左右型的雙曲線標準式為 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$，其中，中心點為 (h,k)，故此雙曲線的標準式為 $\dfrac{(x-0)^2}{3^2}-\dfrac{(y-1)^2}{4^2}=1$，經整理為 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$。

正焦弦長為 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times 4^2}{3}=\dfrac{32}{3}$。

例題 2

已知雙曲線的方程式為 $16x^2-9y^2-32x-36y+164=0$，

試求：(1)中心點坐標　(2)貫軸長　(3)焦點坐標　(4)正焦弦長。

Ans：(1) $(1,-2)$　(2) 8　(3) $(1,-7)$ 、$(1,3)$　(4) $\frac{9}{2}$ 。

先將原式配方 $16(x^2-2x+1)-9(y^2+4y+4)=-164+16-36$

整理得　$16(x-1)^2-9(y+2)^2=-144$

同除 -144 得　$-\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$

由上式可知此雙曲線為上下型，且 $a^2=9$ 、$b^2=16$ 、中心點坐標為 $(1,-2)$ 。

故貫軸長為 $2a=8$ 。

由 $c^2=a^2+b^2=9+16=25$ ，可知 $c=5$ ，故兩焦點坐標為 $(1,-2\pm5)$ ，

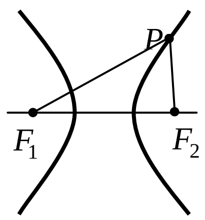
$(1,-7)$ 、$(1,3)$ 。

正焦弦長為 $\frac{2b^2}{a}=\frac{32}{3}$ 。

例題 3

已知雙曲線 $\frac{(x+3)^2}{144}-\frac{(y+1)^2}{25}=1$ 的兩焦點為 F_1 、F_2 ，且 P 為雙曲線上一點，滿足 $\overline{PF_1}:\overline{PF_2}=5:3$，試求△ PF_1F_2 的周長。

Ans：



雙曲線方程式可知 $a^2=144$ 、$b^2=25$ ，

故 $c=\sqrt{144+25}=13$ ，即 $\overline{F_1F_2}=26$ 。

此時不妨設 P 點在雙曲線的某一邊上，如右圖所示。

由雙曲線定義可知 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a=24$

設 $\overline{PF_1}=5t$ ，$\overline{PF_2}=3t$ （ $t>0$ ），代入上式得 $|5t-3t|=2t=24$ ，$t=12$ 。

故 $\overline{PF_1}=60$ ，$\overline{PF_2}=36$ ，△ PF_1F_2 的周長為 $24+60+36=120$ 。

溫故知新

習題 1

已知一雙曲線的方程式為 $\frac{x^2}{5}-\frac{(y-3)^2}{4}=1$，

試求： (1)中心點坐標　(2)焦點坐標　(3)貫軸頂點坐標　(4)正焦弦長。

習題 2

一雙曲線的兩焦點為 $F_1(0,6)$ 、 $F_2(0,-6)$ ，共軛軸長為 8，試求此雙曲線的方程式。

習題 3

坐標平面上兩點 $A(5,0)$ 、 $B(-5,0)$ ，若一動點 $P(x,y)$ 滿足 $\left|\overline{PA}-\overline{PB}\right|=8$ ，則所有 P 點所成的圖形為何？其方程式為何？

習題 4

已知雙曲線的兩焦點為 F_1 、 F_2 ，且貫軸長為 8，一直線 L 過 F_2 ，且與此雙曲線交於 A、B 兩點，且△ ABF_1 的周長 30，求 $\overline{AB}$ 的長度。

習題 5

若雙曲線的方程式為 $\left|\sqrt{(x-4)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}\right|=2$ ，試求中心點坐標及共軛軸長。

習題 6　【97 學測】

設 F_1 與 F_2 為坐標平面上雙曲線 $\Gamma:\frac{x^2}{8}-y^2=1$ 的兩個焦點，且 $P(-4,\ 1)$ 為 Γ 上一點。若 $\angle F_1PF_2$ 的角平分線與 x 軸交於點 D，則 D 的 x 坐標為何？

習題 7　【98 學測】

有一橢圓與一雙曲線有共同的焦點 F_1、F_2，且雙曲線的貫軸長和橢圓的短軸長相等。設 P 為此橢圓與雙曲線的一個交點，且 $\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=64$ ，則 $\overline{F_1F_2}=$？

習題 8 【101 學測】

平面上兩點 F_1 、 F_2 滿足 $\overline{F_1F_2}=4$ 。設 d 為一實數，令 Γ 表示平面上滿足 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=d$ 的所有 P 點所成的圖形，又令 C 為平面上以 F_1 為圓心、6 為半徑的圓。請問下列哪些選項是正確的？

(1) 當 $d=0$ 時，Γ 為直線

(2) 當 $d=1$ 時，Γ 為雙曲線

(3) 當 $d=2$ 時，Γ 與圓 C 交於兩點

(4) 當 $d=4$ 時，Γ 與圓 C 交於四點

(5) 當 $d=8$ 時，Γ 不存在

解答與解析

習題 1： (1) $(0,3)$ (2) $(3,3)$ 、 $(-3,3)$ (3) $(\pm\sqrt{5},3)$ (4) $\dfrac{8}{\sqrt{5}}$ 。

習題 2： $-\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 。

習題 3： 雙曲線，$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

習題 4： 7

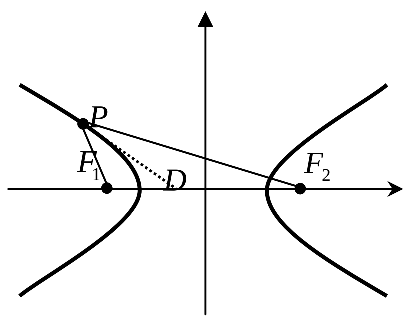
習題 5： 中心 $(-1,0)$ 、共軛軸長 $4\sqrt{2}$

習題 6：

由標準式可知此雙曲線為左右型，且中心點在$(0,0)$，$a^2=8$，$b^2=1$；

故 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{8+1}=3$，可知兩焦點坐標為 $(\pm 3,0)$ 。

依題意可畫圖如右所示。



$\because \overline{PD}$ 為角平分線，由角平分線性質可知

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，$\overline{PF_1}:\overline{PF_2}=\overline{F_1D}:\overline{DF_2}$

又 $\overline{PF_1}=\sqrt{(-4+3)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$

$\overline{PF_2}=\sqrt{(-4-3)^2+(1-0)^2}=5\sqrt{2}$

故 $\overline{F_1D}:\overline{DF_2}=\sqrt{2}:5\sqrt{2}=1:5$

由內分點公式可知 D 點坐標為 $\left(\dfrac{5\times(-3)+1\times3}{6},\dfrac{5\times0+1\times0}{6}\right)=(-2,0)$

習題 7：

設 $\overline{F_1F_2}=2c$（$c>0$），依題意可將雙曲線及橢圓作如下假設

雙曲線：

左右型，中心在原點，貫軸長為 $2a$（$a>0$），共軛軸長為 $2b$（$b>0$），

可得方程式為 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，且 $c^2=a^2+b^2$

橢圓：

長軸在 x 軸上，中心在原點，長軸長為 $2m$（$m>0$），短軸長為 $2a$（$a>0$），

可得方程式為 $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$，且 $m^2=c^2+a^2$

由雙曲線及橢圓的定義可知 $\begin{cases}\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a\\ \overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2m\end{cases}$

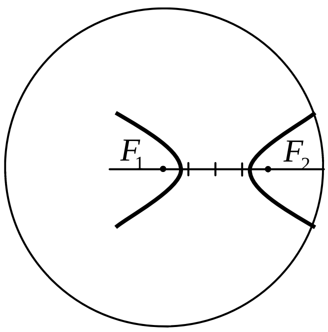
兩邊平方得 $\begin{cases}\overline{PF_1}^2-2\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}+\overline{PF_2}^2=4a^2\\ \overline{PF_1}^2+2\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}+\overline{PF_2}^2=4m^2\end{cases}$

兩式相減得 $4\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=4m^2-4a^2=4(m^2-a^2)=4c^2$

故 $\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=c^2=64$，得 $c=8$

則 $\overline{F_1F_2}=2c=16$

習題 8：



當 $d=0$ 時，Γ 為 $\overline{F_1F_2}$ 的中垂線，與 C 有 2 個交點。

當 $0<d<4$ 時，Γ 為雙曲線，與 C 有 4 個交點。

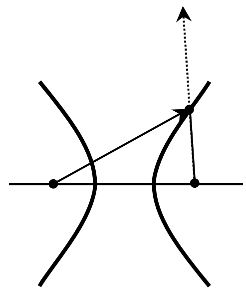
當 $d=4$ 時，Γ 為兩射線，與 C 有 2 個交點。

當 $d>4$ 時，Γ 的圖形不存在。

故選 (1)(2)(4)(5)。

延伸閱讀

(1)雙曲線的光學性質



如右圖，從一個焦點 F_1 射出的光線，當碰到另一隻雙曲線上一點 P 時，折射的路徑在直線 PF_2 的沿長線上。

(2)雙曲線的參數式

利用三角函數的關係式 $\tan^2\theta-\sec^2\theta=1$ 可得：

左右型：$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$，參數式為 $\begin{cases}x=a\tan\theta+h\\ y=b\sec\theta+k\end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$。

上下型：$-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$，參數式為 $\begin{cases}x=b\sec\theta+h\\ y=a\tan\theta+k\end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$。