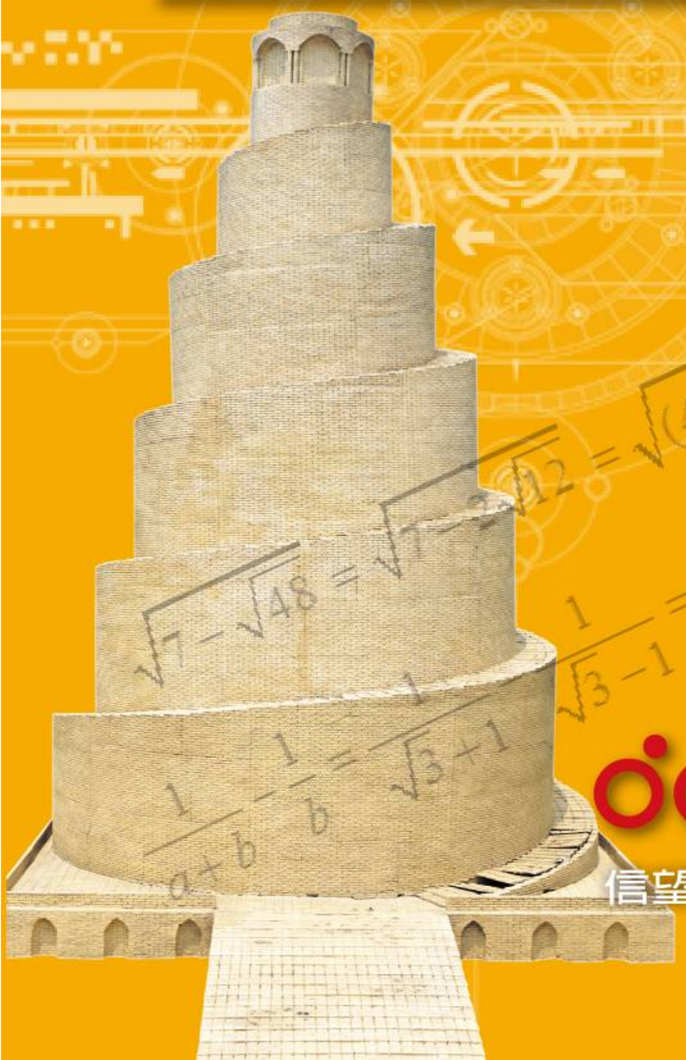
數學 基礎講義

廣義的三角函數

信望愛文教基金會・數學種子教師團隊



信望愛文教基金會

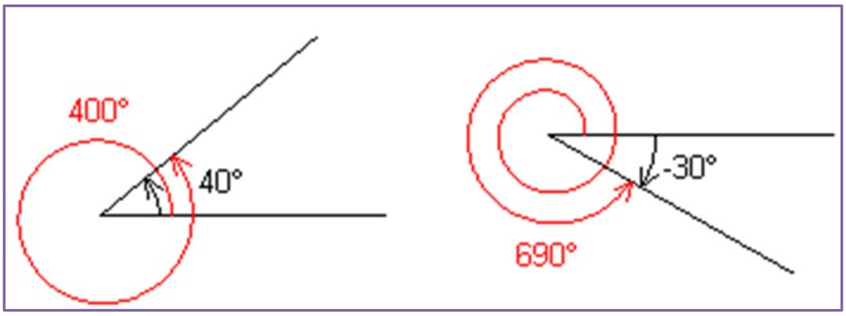
廣義的三角函數

有向角，廣義角，同界角

平面上，一射線繞其端點旋轉，我們設定射線旋轉的起點為始邊；終點為終邊，以及逆時鐘方向為正；順時鐘方向為負，而旋轉當然可以超過一圈、兩圈、三圈。所以，在角度上廣義角不會受到任何的限制。另外，若是有兩個有向角擁有相同的始邊與終邊，我們稱之為同界角。不難想像，兩個角度若是互為同界角，則他們的差別將僅僅存在於旋轉的圈數，故兩同界間的角度差必為 360°的倍數。

廣義角的三角函數

記得我們曾經將三角函數定義為角度與其對應直角三角形的邊長比例，但這個思維很明顯地對於廣義角將不再適用，於是數學家們想到了以下新的定義來處理廣義角的三角函數。

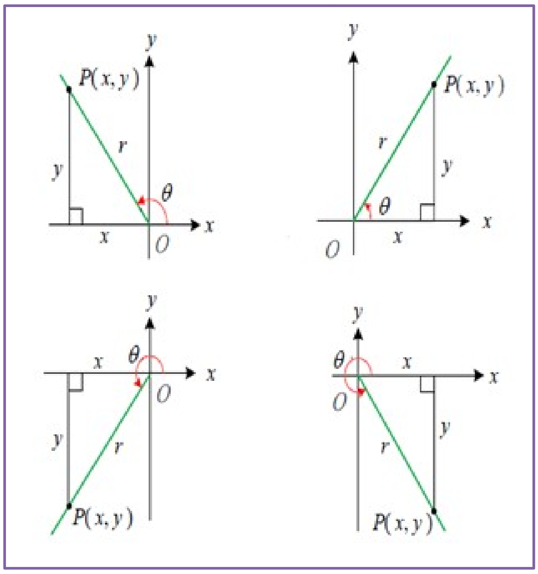


狹義的三角函數將函數的角度值定義於直角三角形的內角上，但在廣義三角函數上我們為了打破角度上的限制，改將角度定義在整個坐標系上。

作法如下，將有向角θ的頂點置於原點O、使邊置於X軸上，取終邊上任一非原點之點P，設其座標為(x, y)，並設$\overline{OP}$ =r。

接著我們試圖從銳角的情況推廣至所有廣義角，從右上圖中可以看到當θ為銳角的時候，沿用之前學過的定義可以得到

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$



在這裡我們發現了一件令人開心的現象，那就是邊長的比例也可以用座標的比例來替換，而且不論 θ 如何改變，這個結論都可以適用。

於是，關於廣義角的三角函數我們可以結論定義如上所述，

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

廣義三角函數的平方關係

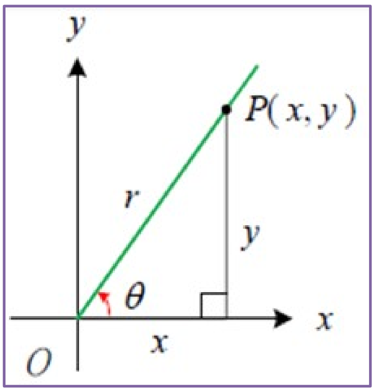
在之前我們曾經利用畢氏定理成功的證明了 sinθ與 cosθ間的平方關係，顯然這套作法對於廣義角的三角函數將不再適用。那麼這個平方關係是否還會繼續存在呢？

為了要證明 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 這個等式對於任意角度都成立，我們從廣義角的三角函數定義上來檢視。在稍早之前我們已經定義 $\sin\theta = \frac{y}{r}$、$\cos\theta = \frac{x}{r}$（r 為 θ 之終邊上任一點 P 至原點距離，x、y 為 P 的座標），距離公式告訴我們 $r = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$，所以我們有能力將 $\sin^2\theta + \cos^2\theta$改寫成 $\frac{y^2}{r}+\frac{x^2}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}^2$

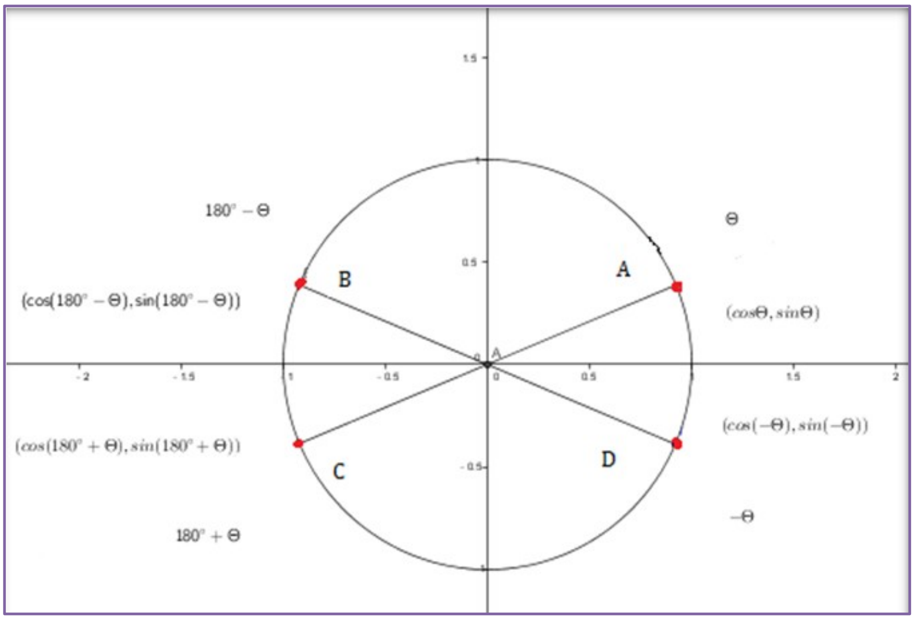
$$= \frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$= 1$$

廣義三角函數的補角關係



在定義廣義三角函數的過程中，我們曾經利用有向角 θ 的終邊上一點座標來定義該角度對應的三角函數。現在我們從另外一個角度出發，觀察右圖中直角三角形不難發現其底跟高，也就是點 P 的 X 座標及 Y 座標分別可以$r\cos\theta$及$r\sin\theta$表示，換句話說任意一點 P 的座標 (x, y)都可以以 $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ 來表示。



為了讓情況更單純一點，我們定義一個圓心為 (0,0)、半徑為 1 的圓為單位圓，這麼一來我們就可以保證單位圓上的任何一點到圓心的距離都是 1，也就是說任何射線與單位圓的交點座標都可以 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 簡示之。

接下來我們終於可以進入正題，從上圖中我們可以看到 A、B 以及 C、D 分別對稱於 Y軸，A、D 以及 B、C 分別對稱於 X 軸。簡單來說，對稱 Y 軸代表兩點高度也就是 Y 座標相同、X 座標互為相反數，反之對稱 X 軸則是 X 座標相同、Y 座標互為相反數。將上述結論對應到四個點的點座標我們就可以輕鬆得到廣義三角函數的補角關係

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$$

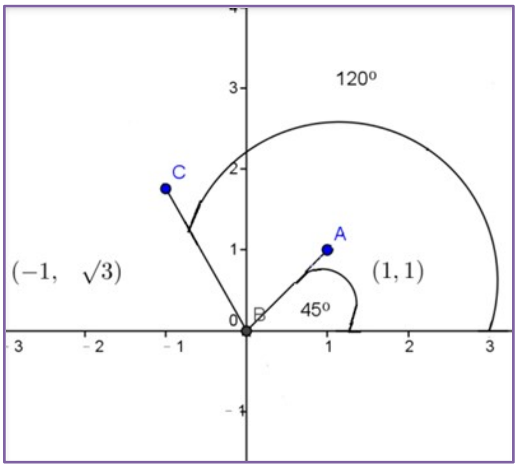
$$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$$

直角坐標與極坐標轉換

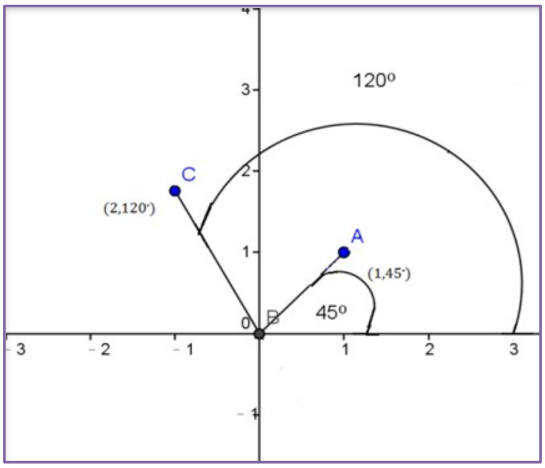
如同直角坐標系一般，極座標也是一個二維坐標系，它所包含的兩個維度分別為表示與極點距離的 r 坐標、以及表示按逆時針方向坐標距離 0°射線角度的 θ 坐標。我們已經知道在直角坐標系上的任意一點都可以表示成 $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$，極坐標系就是直接取這裡的 r 以及 θ 作為變數，直接將點坐標表示成 (r,θ)。

EX:

直角坐標系



極坐標系



小試身手

例題 1	設 $\tan\theta = \frac{-4}{3}$，試求 $\frac{5\sin\theta+8}{15\cos\theta-7}$ 的值
例題 2	設點 P(sinθcosθ, tanθcosθ) 在第三象限內， 若 tanθ 為方程式 $6x^2 - x - 1 = 0$ 的一根，試求 (1) tanθ (2) $2\sin^2\theta + 3\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta$
例題 3	設 $\cos100^\circ = k$，試以 k 表示 $\tan280^\circ$ 之值
例題 4	設極坐標平面上兩點 $A[4, 20^\circ]$ $B[4, 80^\circ]$，試求 $\overline{AB}$ 的長
例題 5	設θ是一銳角，已知θ有一個同界角的度數恰為 6θ，試問θ值
例題 6	若θ為任意角，且 $f(\theta) = 2\cos^2\theta + 5\sin\theta - 1$ 之最大值為 M，最小值為 m， 試求 $M + m$ 之值
例題 7	設 $f(x) = \frac{2\tan x}{\tan^2 x+\tan x+1}$ 其中 x 可為任意角， 若$f(x)$的最大值為M，最小值為m，試求 $M + m$ 之值
例題 8	設 $0^\circ < \theta < 90^\circ$，若 $2\cos\theta - 1 = k(2\cos\theta + 1)$，試求 k 值的範圍

解答與解析

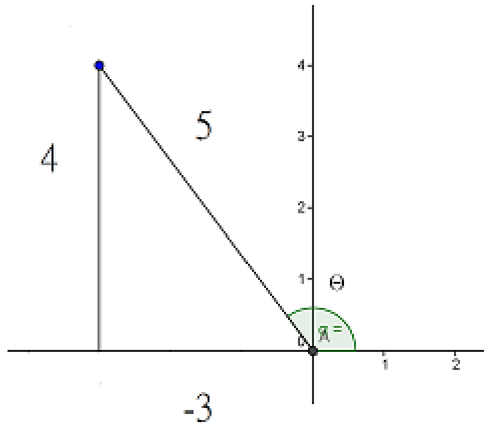
例題 1：$\tan\theta < 0$, θ為第二象限角 or 第四象限象角

分別討論如下，

(1)假設θ為第二象限角

則根據廣義三角函數定義 $\sin\theta = \frac{4}{5}$ $\cos\theta = \frac{-3}{5}$

在此情況下，$\frac{5\sin\theta+8}{15\cos\theta-7} = \frac{5\cdot\frac{4}{5}+8}{15\cdot\frac{-3}{5}-7} = \frac{-3}{4}$



(2)假設θ為第四象限角

則 $\sin\theta = \frac{-4}{5}$，$\cos\theta = \frac{3}{5}$

$\frac{5\sin\theta+8}{15\cos\theta-7} = \frac{5\cdot\frac{-4}{5}+8}{15\cdot\frac{3}{5}-7} = 2$

故 $\frac{5\sin\theta+8}{15\cos\theta-7} = \frac{-3}{4}$ 或 2

例題 2：

(1)$P(\sin\theta\cos\theta, \tan\theta\cos\theta)$ 位於第三象限，

$\sin\theta\cos\theta < 0, \tan\theta\cos\theta < 0$

其中 $\tan\theta\cos\theta = \sin\theta < 0$

故 $\cos\theta > 0 \to \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta < 0$

(2)$\tan\theta$ 為方程式 $6x^2 - x - 1 = 0$ 的一根

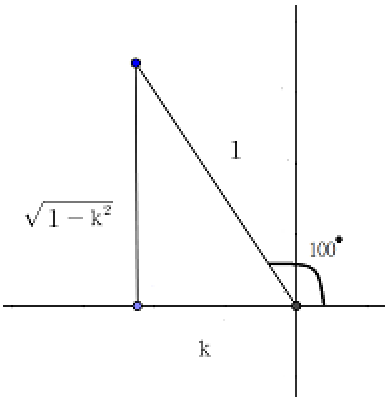
$x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{1-(-24)}}{2\cdot 6} = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{-1}{3}$

由已知 $\tan\theta < 0$ 得 $\tan\theta = \frac{-1}{3}$

$\sin\theta < 0, \cos\theta > 0 \to \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{10}}$ $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$

分別代入 (2) 得 $2\sin^2\theta + 3\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta = \frac{-8}{5}$

例題 3：$\cos 100^\circ = k$ 依照這個已知我們可以畫出下邊圖形幫助思考

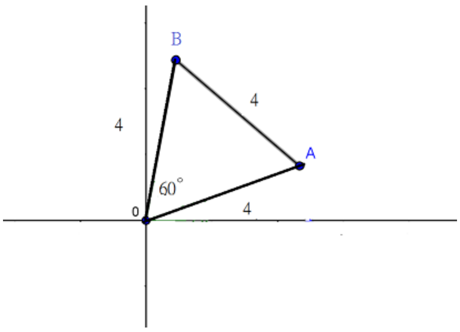


$\tan 280^\circ = \tan(100^\circ + 180^\circ) = \tan 100^\circ = \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$

例題 4：依照題意可畫出圖如下

ΔOAB 為一正三角形

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB} = 4$



例題 5：已知 θ 的所有同界角皆可表示成 $\theta+360^\circ\cdot k\ (k\in Z)$

$6\theta=\theta+360k^\circ$

$5\theta=360k^\circ$

$\theta=72k^\circ$

由題目敘述已知 θ 為銳角，故 $\theta=72^\circ$

例題 6：$f(\theta)=2\cos^2\theta+5\sin\theta-1$

在這裡存在兩個未知數我們無法解決故須先使用平方關係將未知數減少為一個

$2\cos^2\theta+5\sin\theta-1=2(1-\sin^2\theta)+5\sin\theta-1$

$=-2\sin^2\theta+5\sin\theta+1$

$=-2(\sin\theta-\frac{5}{4})^2+\frac{33}{8}$

θ為任意角，$-1\leqq\sin\theta\leqq 1$

$-2(\sin\theta-\frac{5}{4})^2+\frac{33}{8}$ 可視為一開口向下，頂點為 $(\frac{5}{4},\frac{33}{8})$ 之拋物線

極大值產生於最靠近頂點的 $\sin\theta=1$

$$-2(1-\frac{5}{4})^2+\frac{33}{8}=4$$

極小值產生於限制範圍離頂點較遠之端點 $\sin\theta=-1$

$$-2(-1-\frac{5}{4})^2+\frac{33}{8}=-6$$

$M+m=4+(-6)=-2$

例題 7：令 $\frac{2\tan x}{\tan^2 x+\tan x+1}=k$ 經過移項化簡可得

$k\tan^2\theta+(k-2)\tan\theta+k=0$

$(k-2)^2-4k^2\geqq 0$

$3k^2+4k-4\leqq 0$

$(k+2)(3k-2)\leqq 0$

$\therefore\ -2\leqq k\leqq\frac{2}{3}$ □

$M+m=-2+\frac{2}{3}=\frac{-4}{3}$

例題 8：$\cos\theta-1=k(2\cos\theta+1)$

$k=\frac{2\cos\theta-1}{2\cos\theta+1}=\frac{(2\cos\theta+1)-2}{2\cos\theta+1}=1-\frac{2}{2\cos\theta+1}$

$0^\circ<\theta<90^\circ\rightarrow 0<\cos\theta<1$

$1<2\cos\theta+1<3$

$\frac{1}{3}<\frac{1}{2\cos\theta+1}<1$

$-2<-\frac{2}{2\cos\theta+1}<\frac{-2}{3}$

$-1<k<\frac{1}{3}$