

# 數學 1 進階講義

## 首數與尾數問題

景美女中・林哲安老師



信望愛文教基金會

## 3-5-2 首數與尾數問題

### 定理證明或說明

#### 1. 首數與尾數：

設  $x$  為正數且  $x = a \times 10^n$ ，其中  $1 \leq a < 10$ ， $n$  為整數，

則  $\log x = n + \log a$ ，( $0 \leq \log a < 1$ )

此時稱整數  $n$  為  $\log x$  的首數，正小數  $\log a$  為  $\log x$  的尾數

#### 2. 首數與尾數的特性

設  $x$  是一個正數，則  $\log x = n + \log a$ ，其中  $0 \leq \log a < 1$ ， $n$  為整數：

(1) 若  $\log x$  的首數為  $n$  ( $n \geq 0$ )，則  $x$  的整數部分為  $n+1$  位

例如： $x = 123000$

$$x = 1.23 \times 10^5,$$

$$\log x = 5 + \log 1.23,$$

$\log x$  的首數為 5。

(2) 若  $\log x$  的首數為  $-n$  ( $n > 0$ )，則  $x$  是純小數且自小數點後第  $n$  位開始不為 0。

$$x = 0.00123$$

$$x = 1.23 \times 10^{-3}$$

$$\log x = (-3) + \log 1.23$$

$\log x$  的首數為  $-3$

(3) 尾數  $\log a$  的應用參見例 1、例 2。

### 注意事項

尾數必滿足  $0 \leq \log a < 1$ 。

### 關鍵字

位數、最高位數字、首數、尾數。

### 例題 1

將  $2^{50}$  乘開後是幾位數？又其最高位數字為何？ ( $\log 2 \approx 0.3010$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$ )

Ans：

$$\log 2^{50} = 50 \times \log 2 = 50 \times (0.3010) = 15.05 = 15 + 0.05$$

$$\text{因 } \log 1 < 0.05 < \log 2$$

所以  $2^{50}$  是 16 位數且最高位數字為 1。

### 例題 2

將  $\left(\frac{3}{5}\right)^{30}$  乘開後小數點後，從小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？又小數點後開始不為 0 的數字是多少？

Ans：

$$\log \left(\frac{3}{5}\right)^{30} = 30 \times \log \left(\frac{3}{5}\right) = 30 \times (\log 3 - \log 5) = 30 \times (-0.2219) = -6.657 = -7 + 0.343,$$

$$\text{因 } \log 2 < 0.343 < \log 3,$$

所以  $\left(\frac{3}{5}\right)^{30}$  自小數點後第 7 位開始出現不為 0 的數字，第一個不是 0 的數字是 2

### 例題 3

求滿足  $\left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{1000}$  的最小正整數  $n$

Ans：

$$\text{將兩邊取對數得 } \log \left(\frac{5}{6}\right)^n < \log \frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow n \log \frac{5}{6} < \log \frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow n(\log 5 - \log 6) < -3$$

$$\Rightarrow n > \frac{3}{0.0791} = 37.925$$

最小的正整數  $n$  為 38

#### 例題 4

已知  $47^{20}$  為 34 位數，試求：

(1)  $47^{14}$  展開後為幾位數？(2)  $47^{-5}$  展開後在小數點後第幾位開始不為 0？

Ans：

已知  $47^{20}$  為 34 位數，得  $33 \leq \log 47^{20} < 34$

$$\Rightarrow 33 \leq 20 \log 47 < 34$$

$$\Rightarrow 1.65 \leq \log 47 < 1.7$$

$$(1) \log 47^{14} = 14 \log 47$$

$$\Rightarrow 14 \times 1.65 \leq 14 \log 47 < 14 \times 1.7$$

$$\Rightarrow 23.1 \leq \log 47^{14} < 23.8$$

故  $47^{14}$  為 24 位數。

$$(2) \log 47^{-5} = -5 \log 47$$

$$\Rightarrow -5 \times 1.7 < -5 \log 47 \leq -5 \times 1.65$$

$$\Rightarrow -8.5 < \log 47^{-5} \leq -8.25$$

故  $47^{-5}$  在小數點後第 9 位開始不為 0

#### 例題 5

已知  $100 < x < 1000$ ，且  $\log x$  與  $\log x^3$  的尾數相同，求  $x$  的值。

Ans：

設  $\log x^3 - \log x = n$  是一個整數

$$\Rightarrow 3 \log x - \log x = 2 \log x = n$$

又因  $100 < x < 1000$

$$\Rightarrow 2 < \log x < 3$$

$$\Rightarrow 4 < 2 \log x < 6$$

$$\Rightarrow 2 \log x = 5$$

$$\text{故 } x = 10^{\frac{5}{2}} = \sqrt{100000}。$$

#### 例題 6

(1) 求  $2^{106} + 3^{60}$  展開後為幾位數？ (2)  $2^{106} + 3^{66}$  為幾位正整數？

Ans :

(1) 因  $\log 2^{106} = 106 \times \log 2 = 106 \times 0.3010 = 31.906 = 31 + 0.906$

$$\log 3^{60} = 60 \times \log 3 = 60 \times 0.4771 = 28.63 = 28 + 0.63$$

則  $2^{106}$  為 32 位數且  $3^{60}$  為 29 位數。

所以  $2^{106} + 3^{60}$  為 32 位數。

(2)  $\log 2^{106} = 106 \times \log 2 = 106 \times 0.3010 = 31.906 = 31 + 0.906$

$$\text{又 } \log 8 < 0.906 < \log 9$$

則  $2^{106}$  為 32 位整數，最高位數字為 8

$$\log 3^{66} = 66 \times \log 3 = 106 \times 0.4771 = 31.4886 = 31 + 0.4886$$

$$\text{又 } \log 3 < 0.4886 < \log 4$$

則  $3^{66}$  為 32 位整數，最高位數字為 3

所以則  $2^{106} + 3^{66}$  為 33 位正整數。



### 溫故知新

#### 習題 1

將  $6^{50}$  乘開後是幾位數？又其最高位數字為何？

#### 習題 2

將  $\left(\frac{6}{7}\right)^{40}$  乘開後小數點後，從小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？又小數點後開始不為 0 的數字是多少？

#### 習題 3

滿足  $4000 < \left(\frac{5}{4}\right)^n$ ，試求滿足不等式的最小正整數  $n$  值。

#### 習題 4

已知  $100 < x < 1000$ ，且  $\log x^2$  與  $\log \sqrt{x}$  尾數相等，試求  $x$  值。

### 習題 5

試求  $5^{300} + 6^{200}$  展開後為幾位數？最高位數字為何？

### 習題 6

【84 學測】

設  $n$  為自然數，則滿足  $10^{n-1} > 9^n$  的  $n$  值中最小的為\_\_\_\_\_。

### 習題 7

【86 學測】

將  $3^{100}$  以科學記號表示： $3^{100} = a \times 10^m$ ，其中  $1 \leq a < 10$ ， $m$  為整數，則  $a$  的整數部分為\_\_\_\_\_。



習題 1：39 位數，最高位數字為 8

習題 2：從小數點後第 3 位開始出現不為 0 的數字，此數字為 2

習題 3：48

習題 4： $10^{\frac{8}{3}}$

習題 5：210 位數，最高位數字為 5

習題 6：22

兩邊取對數

$$\Rightarrow \log 10^{n-1} > \log 9^n$$

$$\Rightarrow n-1 > 2n \log 3$$

$$\Rightarrow n(1-2\log 3) > 1$$

$$\Rightarrow n > \frac{1}{1-2\log 3} = \frac{1}{1-2 \times 0.4771} = \frac{1}{0.0458} = 21.834$$

故最小的  $n$  值為 22

習題 7：5

$$\text{因 } \log 3^{100} = 100 \log 3 = 100 \times 0.4771 = 47.71$$

$$\text{因 } \log 5 < 0.71 < \log 6,$$

故  $a$  的整數部分為 5