數學 4 進階講義

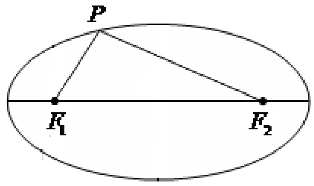
橢圓的定義

淡水商工・蔡旭伶　老師

信望愛文教基金會

14-2-1　橢圓的定義

定理敘述



在同一平面上，到兩定點 F_1 與 F_2 之距離

和為一定值 $2a(a>0)$ 的所有點所構成的圖形，

即滿足 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$ ， $\overline{F_1F_2}<2a$ 時的點 P 軌跡稱為橢圓。

定理證明或說明

1. 定義：

(1) 平面上設二定點 F_1 、 F_2 而 $\overline{F_1F_2}=2c$，則滿足 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a>2c$ 之 P 點的軌跡圖形稱為橢圓。

(2) 若 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a=2c$ ，則 P 點之軌跡圖形為線段 $\overline{F_1F_2}$ 。

(3) 若 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a<2c$ ，則 P 點之軌跡圖形不存在。

2. 名詞說明

(1) 兩定點 F_1 與 F_2 稱為這個橢圓的兩個焦點，且 $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ 為橢圓之一對稱軸。

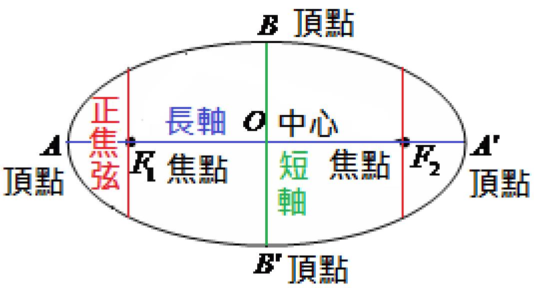
(2) $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ 交橢圓於 A, A' 兩點稱為頂點， $\overline{AA'}$ 為長軸，且 $\overline{AA'}=2a$ 。

(3) 長軸 $\overline{AA'}$ 之中點，也是 $\overline{F_1F_2}$ 之中點為橢圓的中心 O 。

(4) 中心 O 到兩焦點 F_1, F_2 的距離稱為焦距，通常令 $\overline{OF_1}=\overline{OF_2}=c$ 。

(5) 過中心且垂直長軸的直線也是對稱軸，此軸交橢圓於 B, B' ， $\overline{BB'}$ 稱為短軸，通常令 $\overline{BB'}=2b$ ， B, B' 也是頂點。

(6) 橢圓上相異兩點所成之線段稱為弦，過焦點的弦稱為焦弦，垂直長軸的焦弦稱為正焦弦。



注意事項

橢圓中，長軸長$2a>0$，短軸長$2b>0$，焦距$2c>0$，$a^2=b^2+c^2$

例題 1

已知坐標平面上三點$A, B(3,2), C(-3,2)$，且ΔABC周長為 15，則A點軌跡形成的圖形為何？

Ans：

已知$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}=15$，$\overline{BC}=6$，故$\overline{AB}+\overline{AC}=9$

A點到兩定點B,C之距離和為一定值 9，且此定值$9>\overline{BC}=6$

故由定義得知A點軌跡形成的圖形為橢圓。

例題 2

一方程式$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=k$，試由$k$值討論方程式代表的圖形。

Ans：

由定義得知兩焦點$F_1(0,0), F_2(1,1)$，$\overline{F_1F_2}=\sqrt{2}=2c$，$2a=k$

(1) $2a>2c$，$k>\sqrt{2}$時，圖形為橢圓。

(2) $2a=2c$，$k=\sqrt{2}$時，圖形為線段$\overline{F_1F_2}$。

(3) $2a<2c$，$k<\sqrt{2}$時，圖形不存在。

例題 3

已知方程式$\sqrt{(x-k)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}=5$的圖形為橢圓，求$k$的範圍。

Ans：

兩焦點$F_1(k,0), F_2(1,4)$，$\overline{F_1F_2}=\sqrt{(k-1)^2+16}=2c$，$2a=5$

$\sqrt{(k-1)^2+16}<5$，$(k-1)^2+16<25$，$(k-1)^2<9$，$-3<k-1<3$，$-2<k<4$

例題 4

已知橢圓方程式$\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2}=10$，試求：

(1)中心坐標

(2)焦距

(3)長軸長

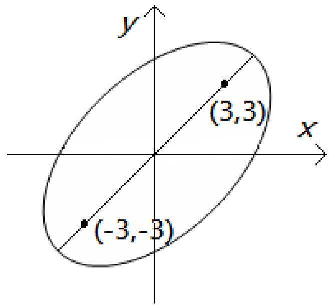
(4)長軸所在的直線方程式

(5)短軸所在的直線方程式。

Ans：

由方程式得知兩焦點$F_1(3,3),F_2(-3,-3)$，$\overline{F_1F_2}=6\sqrt{2}$，$2a=10$，

橢圓圖形如下



(1) 中心坐標為$\overline{F_1F_2}$中點$(\frac{3+(-3)}{2},\frac{3+(-3)}{2})=(0,0)$

(2) 焦距為$\overline{F_1F_2}=6\sqrt{2}$

(3) 長軸長為$2a=10$

(4) 長軸所在之直線方程式亦是兩焦點$F_1(3,3),F_2(-3,-3)$所在之直線方程式

$\frac{y-3}{x-3}=\frac{-3-3}{-3-3}$，$x-3=y-3$，$x-y=0$

(5) 短軸所在之直線方程式為過中心垂直長軸的直線方程式，即過$(0,0)$，且垂直$x-y=0$，此方程式為$x+y=0$

溫故知新

習題 1

已知坐標平面上三點$A,B(6,0),C(-6,0)$，且ΔABC周長為 20，則A點軌跡形成的圖形為何？

習題 2

已知方程式$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}=k^2-4k$的圖形為橢圓，求$k$的範圍。

習題 3

已知橢圓方程式$\sqrt{(x-6)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-6)^2}=10$，試求：

(1)中心坐標

(2)焦距

(3)長軸長

(4)長軸所在的直線方程式

習題 4 【學測 95】

考慮坐標平面上所有滿足 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}=10$ 的點 (x,y)所成的圖形，下列敘述何者正確？

(A) 此圖形為一橢圓

(B) 此圖形為一雙曲線

(C) 此圖形的中心在 $(2,-2)$

(D) 此圖形對稱於 $x-2=0$

(E) 此圖形有一頂點 $(2,3)$ 。

習題 5 【指考甲 95】

在坐標平面上給定兩點 $A(1,3)$ 與 $B(5,6)$。考慮坐標平面的點集合 $S=\{P \mid \triangle PAB$ 之面積為 10 且周長為 15 $\}$，則

(A) S 為空集合

(B) S 恰含 2 個點

(C) S 恰含 4 個點

(D) S 為兩線段之聯集

(E) S 為兩直線之聯集

解答與解析

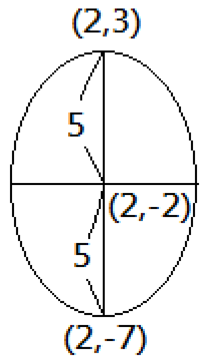
習題 1：橢圓

習題 2：$k>5$ 或 $k<-1$

習題 3：(1) $(3,3)$　　(2) $6\sqrt{2}$　　(3) 10　　(4) $x+y=6$

習題 4：ACDE

由方程式得知兩焦點 $F_1(2,0),F_2(2,-4)$，



$\overline{F_1F_2}=2c=4$，$2a=10$

(C)中心為 $F_1(2,0),F_2(2,-4)$ 的中點 $(2,-2)$

(D) $F_1(2,0),F_2(2,-4)$ 所在的直線方程式為 $x-2=0$

(E)橢圓圖形如右，長軸上兩頂點分別為 $(2,3),(2,-7)$

習題 5：C

已知 $\overline{AB}+\overline{AP}+\overline{BP}=15$，$\overline{AB}=5$，

(1)由△ PAB 之面積為 10，得 P 到 $\overleftrightarrow{AB}$ 距離為 4，此時 P 軌跡為兩直線

(2)由 △ PAB 周長為 15，得 $\overline{AP}+\overline{BP}=10$，此時 P 軌跡為長軸長 10，焦距 5，短軸長為 $\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$ 的橢圓，$b=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}=\sqrt{\dfrac{75}{4}}$

圖形參考下圖，可知有四交點。