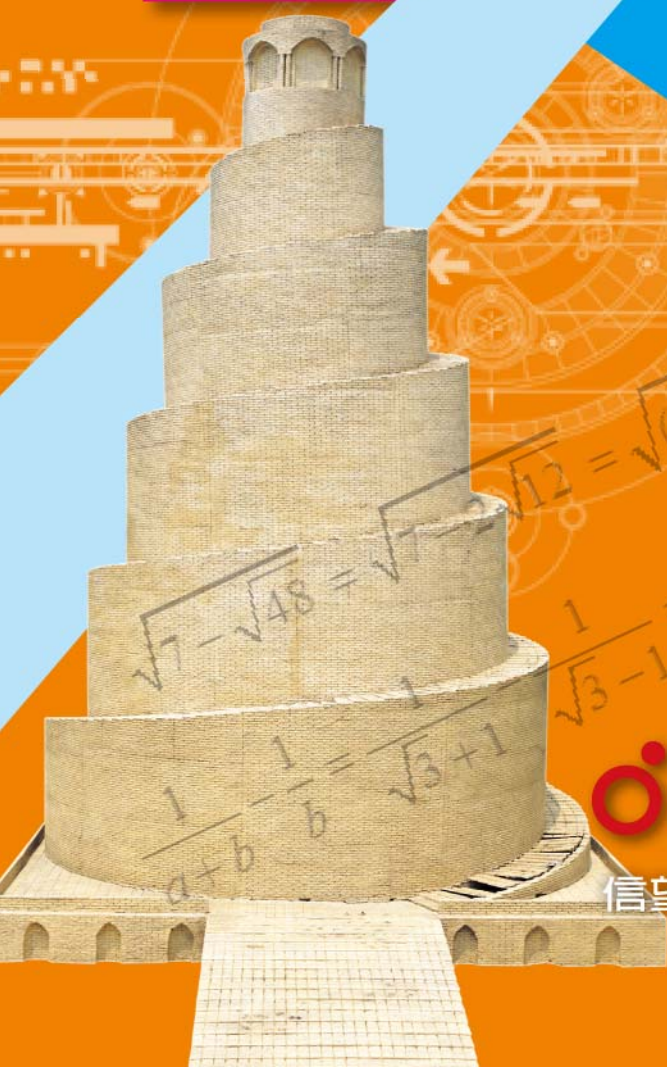


數學 3

進階
講義

二階克拉瑪公式

成功高中 · 陳冠宏 老師



信望愛文教基金會

10-4-3 二階克拉瑪公式



定理敘述

1. 二階克拉瑪公式

$$\text{給定二元一次方程組} \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$\text{令 } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\text{若 } \Delta \neq 0, \text{ 則方程組之解 } (x, y) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right)$$

2. 二元一次方程組解的討論

(1) 恰有一解： $\Delta \neq 0$

(2) 無解： $\Delta = 0$ ，但 Δ_x, Δ_y 有一不為 0

(3) 無限多解： $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$



定理證明或說明

1. 克拉瑪公式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \times b_2 - (2) \times b_1 : (a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$\text{若 } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \text{ 則 } x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\text{同理, } (2) \times a_1 - (1) \times a_2 : (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$\text{若 } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \text{ 則 } y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\text{令 } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \text{ 即得證}$$



2. 二元一次方程組解的討論

承上， $(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$

若 $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ，且 $c_1b_2 - c_2b_1 = 0$ ，則 x 有無限多解

若 $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ，但 $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$ ，則 x 無解

同理，亦可討論 y 的解情形



關鍵字

克拉瑪公式的常數項在等號右邊

例題 1

$$\text{試解方程組} \begin{cases} 4x + 2y = 13 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$\text{Ans: } x = \frac{25}{2}, y = \frac{-37}{2}$$

$$\text{解: } x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{25}{2}, y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 13 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-37}{2}$$

例題 2

$$\text{試解方程組} \begin{cases} 2x + 3y + 8 = 0 \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ans: } x = \frac{-13}{3}, y = \frac{2}{9}$$

解：

先將常數移至等號右邊，方可使用克拉瑪公式

$$\begin{cases} 2x + 3y = -8 \\ x - 3y = -5 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -8 & 3 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{39}{-9} = \frac{-13}{3}, y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-9} = \frac{2}{9}$$

例題 3

試解方程組 $\begin{cases} xy = 3x + 8y \\ 2xy = x + 6y \end{cases}$

Ans : $(x, y) = (0, 0), (2, -1)$

解：

若 $x = 0 \Rightarrow y = 0$ 為一組解

若 $x \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$ ，左右同除 xy

$$\begin{cases} 1 = \frac{3}{y} + \frac{8}{x} \\ 2 = \frac{1}{y} + \frac{6}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}, \frac{1}{y} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}} = -1 \Rightarrow (x, y) = (2, -1)$$

例題 4

試就 k 討論方程組 $\begin{cases} kx + 9y = k + 6 \\ x + ky = k \end{cases}$ 的解

解：

$$\Delta = \begin{vmatrix} k & 9 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 9 = (k+3)(k-3)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} k+6 & 9 \\ k & k \end{vmatrix} = k(k+6) - 9k = k(k-3)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} k & k+6 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - (k+6) = (k+2)(k-3)$$

$\therefore k=3$ 時， $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ ，無限多解

此時，原方程組為 $\begin{cases} 3x + 9y = 9 \\ x + 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = t \end{cases}, t \in R$

$k=-3$ 時， $\Delta = 0$ ，但 Δ_x, Δ_y 有一不為 0，無解

$k \neq 3$ 且 $k \neq -3$ 時， $\Delta \neq 0$ ，恰有一解 $(x, y) = (\frac{k}{k+3}, \frac{k+2}{k+3})$

例題 5

若方程組 $\begin{cases} 3kx + 4y = -9k \\ (2k-1)x + ky = -1 \end{cases}$ 無解，求 $k = \underline{\hspace{2cm}}$

Ans : 2

解：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3k & 4 \\ 2k-1 & k \end{vmatrix} = 3k^2 - 8k + 4 = (k-2)(3k-2)$$

$$\text{無解} \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow k = 2 \text{ 或 } \frac{2}{3}$$

$$k = 2 \Rightarrow \begin{cases} 6x + 4y = -18 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \text{ 為無解}$$

$$k = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = -6 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = -1 \end{cases} \text{ 為無限多解}$$

故 $k=2$

例題 6

若方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 之解為 $x = 1, y = 2$ ，則 $\begin{cases} 2b_1x + 5a_1y + 3c_1 = 0 \\ 2b_2x + 5a_2y + 3c_2 = 0 \end{cases}$ 之解 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$

$$\text{Ans : } \left(-3, -\frac{3}{5}\right)$$

解：

$$\text{令 } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\text{則 } 1 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, 2 = \frac{\Delta_y}{\Delta} \Rightarrow \Delta_x = \Delta, \Delta_y = 2\Delta$$

$$\begin{cases} 2b_1x + 5a_1y + 3c_1 = 0 \\ 2b_2x + 5a_2y + 3c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b_1x + 5a_1y = -3c_1 \\ 2b_2x + 5a_2y = -3c_2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2b_1 & 5a_1 \\ 2b_2 & 5a_2 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -10\Delta$$

$$\begin{vmatrix} -3c_1 & 5a_1 \\ -3c_2 & 5a_2 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 15\Delta_y$$

$$\begin{vmatrix} 2b_1 & -3c_1 \\ 2b_2 & -3c_2 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 6\Delta_x$$

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{\begin{vmatrix} -3c_1 & 5a_1 \\ -3c_2 & 5a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2b_1 & 5a_1 \\ 2b_2 & 5a_2 \end{vmatrix}} = \frac{15\Delta_y}{-10\Delta} = -3 \\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2b_1 & -3c_1 \\ 2b_2 & -3c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2b_1 & 5a_1 \\ 2b_2 & 5a_2 \end{vmatrix}} = \frac{6\Delta_x}{-10\Delta} = -\frac{3}{5} \end{cases}$$



溫故知新

習題 1

試解方程組 $\begin{cases} 22x - 35y = 32 \\ 32x - 53y = 23 \end{cases}$

習題 2

試解方程組 $\begin{cases} 4x - 5y + 5 = 0 \\ 3x - 4y + 6 = 0 \end{cases}$

習題 3

試解方程組 $\begin{cases} 32xy = 22x - 35y \\ 23xy = 32x - 53y \end{cases}$

習題 4

試就 k 討論方程組 $\begin{cases} kx - y = -1 \\ 3kx + ky = 2k + 3 \end{cases}$ 的解

習題 5

若方程組 $\begin{cases} kx + 4y = k + 2 \\ x + ky = k \end{cases}$ 無限多解，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$

習題 6

已知 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2$, $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 3$,

則 $\begin{cases} (4a_1 - 2c_1)x + (3b_1 + a_1)y = c_1 + 2b_1 \\ (4a_2 - 2c_2)x + (3b_2 + a_2)y = c_2 + 2b_2 \end{cases}$ 的解 (x, y) 為 _____

習題 7

【學測 101】

若實數 a 、 b 、 c 、 d 使得聯立方程組 $\begin{cases} ax + 8y = c \\ x - 4y = 3 \end{cases}$ 有解，且聯立方程組 $\begin{cases} -3x + by = d \\ x - 4y = 3 \end{cases}$ 無解，則下列哪些選項一定正確？

(1) $a \neq -2$ (2) $c = -6$ (3) $b = 12$ (4) $d \neq -9$ (5) 聯立方程組 $\begin{cases} ax + 8y = c \\ -3x + by = d \end{cases}$ 無解



解答與解析

習題 1 : $x = 9, y = 5$

習題 2 : $x = 10, y = 9$

習題 3 : $(x, y) = (0, 0), (\frac{1}{5}, \frac{1}{9})$

習題 4 : $k = -3$ 時，無限多解 $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 3t \end{cases}, t \in R$

$k = 0$ 時，無解

$k \neq -3$ 且 $k \neq 0$ 時，恰有一解 $(x, y) = (k, \frac{1}{2})$

習題 5 : 2

習題 6 : $(-\frac{5}{2}, -2)$

習題 7 : (3)(4)

解 : $\begin{cases} ax + 8y = c \\ x - 4y = 3 \end{cases}$ 有解

(1) 唯一解 : $\begin{vmatrix} a & 8 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow a \neq -2$



$$(2) \text{無限多解} : \begin{vmatrix} a & 8 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & 8 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = -2, c = -6$$

$$\begin{cases} -3x + by = d \\ x - 4y = 3 \end{cases} \text{無解}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & b \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b = 12,$$

$$\begin{vmatrix} -3 & d \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow d \neq -9 \text{ 或 } \begin{vmatrix} d & 12 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow d \neq -9$$

$$\text{又} \begin{cases} ax + 8y = c \\ -3x + by = d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{若 } a \neq -2, \text{ 則 } \begin{vmatrix} a & 8 \\ 1 & b \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{有唯一解}$$

$$\text{若 } a = -2, c = -6, b = 12, d \neq -9 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 8 \\ -3 & b \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a & c \\ -3 & d \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{無解}$$

故選(3)(4)