高中數學 進階講義

古典機率

陳清海 老師

信望愛文教基金會

lt99ok232 機率的性質

主題一、古典機率的定義

設一試驗的樣本空間為 S ．若 S 中每個基本事件出現的機會均等，

則事件 A 發生的機率 $P(A)$ 為「 A 的元素個數 $n(A)$ 與 S 的元素個數 $n(S)$ 之比」，即 $\boldsymbol{P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}}$ ．

【例題 1】【配合課本例 1】

擲一粒公正的骰子，求下列各機率：

(1) 擲出的點數是偶數的機率．

(2) 擲出點數大於 4 點的機率．

Ans：(1) $\frac{1}{2}$，(2) $\frac{1}{3}$

【詳解】

擲一粒公正骰子的試驗中，

樣本空間 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\}$， $n(S)=6$ ．

(1) 因為擲出點數是偶數的事件 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$， $n(A)=3$，

所以擲出偶數點的機率 $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ．

(2) 因為擲出的點數大於 4 點的事件 $B=\{5,\ 6\}$， $n(B)=2$，

所以此事件發生的機率 $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ ．

【類題 1】

從數字 1 到 50 中任選一數，求下列各機率：

(1) 選到 3 的倍數的機率．

(2) 選到質數的機率．

Ans：(1) $\frac{8}{25}$，(2) $\frac{3}{10}$

【詳解】

從數字 1 到 50 中任選一數， $n(S)=50$ ．

(1) A 為選到 3 的倍數的事件， $n(A)=16$，

所以 $P(A)=\frac{16}{50}=\frac{8}{25}$．

(2) 選到質數的事件

$B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47\}$，

$n(B)=15$，所以 $P(B)=\frac{15}{50}=\frac{3}{10}$．

【例題 2】【配合課本例 2】

丟擲大小 2 個骰子，求下列各機率：

(1) 兩個骰子點數相同的機率．

(2) 出現點數乘積是 6 的機率．

Ans：(1) $\frac{1}{6}$，(2) $\frac{1}{9}$

【詳解】

丟擲大小 2 個骰子，

$S=\{(x,\ y)|1\le x\le 6,\ 1\le y\le 6,\ x,\ y\in\mathbb{N}\}$， $n(S)=36$ ．

(1) 兩個骰子點數相同的事件

$A=\{(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)\}$，

$n(A)=6$，所以 $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ ．

(2) 點數乘積是 6 的事件

$B=\{(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)\}$，

$n(B)=4$，所以 $P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ ．

【類題 2】

擲一粒公正的骰子兩次，求下列各機率：

(1) 兩次點數均大於 3．

(2) 第一次的點數大於第二次的點數．

Ans：(1) $\frac{1}{4}$，(2) $\frac{5}{12}$

【詳解】

丟擲一粒骰子兩次，

$S=\{(x,\ y)|1\le x\le 6,\ 1\le y\le 6,\ x,\ y\in\mathbb{N}\}$， $n(S)=36$ ．

(1) 兩次點數均大於 3 的事件

$A=\{(x,\ y)|4\le x\le 6,\ 4\le y\le 6,\ x,\ y\in\mathbb{N}\}$，

$n(A)=3\times3=9$，所以 $P(A)=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$．

(2) B 爲第一次的點數大於第二次的點數，

$n(B)=C_2^6\times1=15$，所以 $P(B)=\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$．

【例題 3】【配合課本例 3】

袋中有 6 個大小相同的球，其中紅球 3 個，白球 2 個，黑球 1 個．

(1) 從中任取一球，求取到白球的機率．

(2) 取一球後不放回，再取一球，求兩球都是紅球的機率．

(3) 從中同時取出 2 球，求兩球顏色相同的機率．

Ans：(1) $\dfrac{1}{3}$，(2) $\dfrac{1}{5}$，(3) $\dfrac{4}{15}$

【詳解】

在每一球被取出的機會均等的原則下，

將所有同色球加以編號（視爲相異）．

(1) 取到白球的機率 $P(A)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$．

(2) 取一球後不放回，再取一球的取法有

$P_2^6=6\times5=30$ 種，故 $n(S)=30$．

設兩球都是紅球的事件爲 B，

$n(B)=P_2^3=3\times2=6$，所以 $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{6}{30}=\dfrac{1}{5}$．

(3) 同時取出 2 球，兩球不分先後順序，

取法有 $C_2^6=15$ 種，故 $n(S)=15$，

設兩球爲同色球的事件爲 C，

$n(C)=C_2^3+C_2^2=3+1=4$，

所以 $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{4}{15}$．

【類題 3】

袋中有 8 個大小相同的球，其中紅球 5 個，白球 3 個．

今自袋中任取 4 球，求下列各機率：

(1) 均爲紅球的機率．

(2) 紅球比白球多的機率．

Ans：(1) $\frac{1}{14}$，(2) $\frac{1}{2}$

【詳解】

在每一球被取出的機會均等的原則下，

將所有同色球加以編號（視爲相異），

任取 4 球，取法 $n(S)=C_4^8$ 種．

(1) 均爲紅球的機率 $P(A)=\frac{C_4^5}{C_4^8}=\frac{1}{14}$．

(2) 紅球比白球多的情形爲 4 個紅球或 3 紅 1 白，

機率 $P(B)=\frac{C_4^5+C_3^5\cdot C_1^3}{C_4^8}=\frac{35}{70}=\frac{1}{2}$．

【例題 4】【配合課本例 4】

同時丟兩個硬幣，求下列各機率：

(1) 出現一正面一反面的機率．

(2) 兩硬幣出現同一面的機率．

Ans：(1) $\frac{1}{2}$，(2) $\frac{1}{2}$

【詳解】

在「每一個硬幣出現正面或反面的機會均等」的原則下，

將兩硬幣做記號來加以區別，

樣本空間 $S=\{(正,\ 正),(正,反),(反,正),(反,反)\}$，

$n(S)=4$．

(1) 出現一正面一反面的事件 $A=\{(正,\ 反),(反,\ 正)\}$，

所以機率 $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$．

(2) 兩硬幣出現同一面的事件 $B=\{(正,\ 正),(反,\ 反)\}$，

所以機率 $P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

【類題 4】

同時丟三個硬幣，求

(1) 三個都出現反面的機率．

(2) 三個硬幣中恰有兩個正面的機率．

Ans：(1) $\frac{1}{8}$ ，(2) $\frac{3}{8}$

【詳解】

樣本空間元素 $n(S)=8$

(1) 三個都出現反面的事件 $A=\{(\text{反},\ \text{反},\ \text{反})\}$,

所以機率 $P(A)=\frac{1}{8}$.

(2) 恰有兩個正面的事件

$B=\{(\text{正},\ \text{正},\ \text{反}),\ (\text{正},\ \text{反},\ \text{正}),\ (\text{反},\ \text{正},\ \text{正})\}$,

機率 $P(B)=\frac{3}{8}$.

【例題 5】【配合課本例 5】

丟擲兩粒公正骰子，試求點數和至少為 9 的機率．

Ans：$\frac{5}{18}$

【詳解】

$n(S)=6\times 6=36$,

設 A 為點數和至少為 9 的事件,

$A=\{(3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3),\ (4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4),\ (5,\ 6),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)\}$

機率 $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

【類題 5】

丟擲三粒公正骰子，試求

(1) 點數和爲 5 的機率．

(2) 最大點數爲 5，最小點數爲 2 的機率．

Ans：(1) $\frac{1}{36}$，(2) $\frac{1}{12}$

【詳解】

(1) 三次點數和爲 5，共有：

$$\{(1,\ 1,\ 3),\ (1,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 1),\ (1,\ 2,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2),\ (2,\ 2,\ 1)\}$$

6 種情形．故三次點數和爲 5 的機率爲 $\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$ ．

(2) 最大點數爲 5，最小點數爲 2 的情形如下

$$(5,\ 5,\ 2),\ (5,\ 2,\ 2)\ \Rightarrow\ \frac{3!}{2!}=3\ ,$$

$$(5,\ 2,\ 3),\ (5,\ 2,\ 4)\Rightarrow 3!=6\ ,$$

機率爲 $\frac{3\times 2+6\times 2}{6^3}=\frac{18}{216}=\frac{1}{12}$ ．

主題三、機率的性質

S 爲一試驗的樣本空間，

1. $P(\varnothing)=\mathbf{0}$， $P(S)=\mathbf{1}$.

2. 對任意事件 A， $\mathbf{0}\le \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})\le \mathbf{1}$.

3. 若 A, B 爲兩事件，則 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\cup \boldsymbol{B})=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})-\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\cap \boldsymbol{B})$.

   其中若 A, B 爲互斥事件（即 $A\cap B=\varnothing$），則 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

4. 若 A' 是事件 A 的餘事件，則 $P(A)=1-P(A)$.

【例題 6】

設 A, B 為樣本空間 S 中的二事件，且 $P(A)=\frac{1}{2}$， $P(B)=\frac{1}{3}$，

$P(A\cap B)=\frac{1}{10}$，求下列各值：

(1) $P(A\cup B)$ ． **(2)** $P(A\cap B')$ ．

Ans：(1) $\frac{11}{15}$，(2) $\frac{2}{5}$

【詳解】

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}=\frac{11}{15}$ ．

(2) $P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{2}{5}$ ．

【類題 6】

設 A, B 為樣本空間 S 中的二事件，且 $P(A)=\frac{1}{3}$， $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$，

$P(A\cup B)=\frac{3}{4}$，求 $P(A'\cap B)$ ．

Ans：$\frac{5}{12}$

【詳解】

因為 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$,

所以 $P(B)=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$,

$P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$ ．

【例題 7】【配合課本例 6】

從 8 個正數、5 個負數中任取 4 個數相乘，求其乘積為負數的機率．

Ans：$\frac{72}{143}$

【詳解】

4 個數乘積爲負數的情形爲

3 正 1 負或 1 正 3 負，兩事件互斥，

機率爲 $\dfrac{C_3^8\times C_1^5+C_1^8\times C_3^5}{C_4^{13}}=\dfrac{72}{143}$ ．

【類題 7】

自 6 位男生 4 位女生中選出一個 5 人委員會，求

(1) 男女生至少各 2 人的機率．

(2) 男生最多 2 人的機率．

Ans：(1) $\dfrac{5}{7}$ ，(2) $\dfrac{11}{42}$

【詳解】

(1) 可能情形爲 2 男 3 女或 3 男 2 女，

機率爲 $\dfrac{C_2^6C_3^4+C_3^6C_2^4}{C_5^{10}}=\dfrac{180}{252}=\dfrac{5}{7}$ ．

(2) 可能情形爲 2 男 3 女或 1 男 4 女，

機率爲 $\dfrac{C_2^6C_3^4+C_1^6C_4^4}{C_5^{10}}=\dfrac{66}{252}=\dfrac{11}{42}$ ．

【例題 8】【配合課本例 7、例 8】

求任 5 人中至少有兩人在同一月份出生的機率．

Ans：$\dfrac{89}{144}$

【詳解】

若 A 表至少有兩人在同一月份出生的事件，

則 A' 表任兩人都不在同一月份出生的事件．

機率 $P(A)=1-P(A')=1-\dfrac{P_5^{12}}{12^5}$

$=1-\dfrac{12\times11\times10\times9\times8}{12\times12\times12\times12\times12}=1-\dfrac{55}{144}=\dfrac{89}{144}$ ．

【類題 8】

求任 3 人中至少有兩人在同一月份出生的機率．

Ans：$\dfrac{17}{72}$

【詳解】

若 A 表至少有兩人在同一月份出生的事件，

則 A' 表任兩人都不在同一月份出生的事件．

機率 $P(A)=1-P(A')=1-\dfrac{P_3^{12}}{12^3}=1-\dfrac{12\times11\times10}{12\times12\times12}=1-\dfrac{55}{72}=\dfrac{17}{72}$．

【例題 9】【配合課本例 9】

某課外活動社團共有 20 位同學參加，已知其中高一、高二、高三同學所占的比例分別為 55%、25%、20%．若由該社團中任選兩人，求此兩人是不同年級學生的機率．

Ans：$\dfrac{119}{190}$

【詳解】

由題意可知，高一同學有 $20\times55\%=11$ 人，

高二同學有 $20\times25\%=5$ 人，

高三同學有 $20\times20\%=4$ 人．

樣本空間 s 為從 20 位同學中任意選兩人，

選法有 $C_2^{20}=190$ 種，故 $n(S)=190$．

令事件 A 表示選出的兩人為同年級的情形，

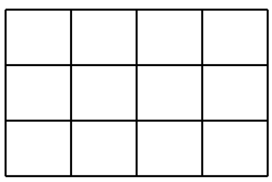
$n(A)=C_2^{11}+C_2^{5}+C_2^{4}=55+10+6=71$．

因此，事件 A' 發生的機率為

$P(A')=1-P(A)=1-\dfrac{71}{190}=\dfrac{119}{190}$．

【類題 9】

在右圖的棋盤方格中，隨機選取兩個格子，求選出的兩個格子不在同一行的機率．（有無同列無所謂）



Ans：$\dfrac{9}{11}$

【詳解】

從 12 個格子中任選 2 個，

$n(S)=C_2^{12}=66$．

兩個格子在同一行的事件為 A，

則 $n(A)=C_1^4\cdot C_2^3=12$，

故兩個格子不在同一行的機率爲

$$1-P(A)=1-\frac{12}{66}=\frac{54}{66}=\frac{9}{11}\ .$$

【例題 10】【常考題】

阿貴和阿美及其他 8 名同學共 10 名學生輪到本周擔任值日生．本周 5 個上課日每天從尙未當過的同學中抽籤選出 2 位輪值．求阿貴和阿美同一天擔任值日生的機率．

Ans：$\frac{1}{9}$

【詳解】

10 名學生任意抽籤擔任值日生的方法有

$C_2^{10}\times C_2^8\times C_2^6\times C_2^4\times C_2^2$種．

若阿貴和阿美要同一天擔任值日生，
則先從 5 個上課日中選出一天讓兩人擔任，

再安排剩下的 8 名同學，方法有 $C_1^5\times C_2^8\times C_2^6\times C_2^4\times C_2^2$．

故阿貴和阿美同一天擔任值日生的機率爲

$$\frac{C_1^5\times C_2^8\times C_2^6\times C_2^4\times C_2^2}{C_2^{10}\times C_2^8\times C_2^6\times C_2^4\times C_2^2}=\frac{C_1^5}{C_2^{10}}=\frac{1}{9}\ .$$

【類題 10-1】

將 A、B、C、…等八人平分成四組，每組兩人，
求 A、B、C 三人中任兩人均不在同一組的機率．

Ans：$\frac{4}{7}$

【詳解】

八人平分成四組，有 $C_2^8\times C_2^6\times C_2^4\times C_2^2\times\frac{1}{4!}$ 種分法，

A、B、C 各自與另一人成一組，

有 $C_1^5\times C_1^4\times C_1^3\times C_2^2$ 種分法，機率爲

$$\frac{C_1^5 \times C_1^4 \times C_1^3 \times C_2^2}{C_2^8 \times C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2 \times \frac{1}{4!}} = \frac{4}{7}.$$

【類題 10-2】

欲將甲、乙、丙、丁、…等八名學生平均分到忠孝仁愛 4 班，求甲乙二人不同班的機率．

Ans：$\frac{5}{9}$

【詳解】

$$\frac{4 \times 3 \times C_1^6 \times C_1^5 \times C_2^4 \times C_2^2}{C_2^8 \times C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2} = \frac{6}{7}.$$

【例題 11】【常考題】

袋中有紅球 4 個，白球 5 個，每次任取一球，取出後不放回．求

(1) 最後一球取到紅球的機率．

(2) 紅球先取完的機率．

Ans：(1) $\frac{4}{9}$，(2) $\frac{5}{9}$

【詳解】

將每個球編號，每次任取一球，取出後不放回，
即將所有球排成一列，排法有 9!種．

(1) 最後一球取到紅球的機率爲 $\frac{C_1^4 \times 8!}{9!} = \frac{4}{9}$．

(2) 紅球先取完即最後一球是白球，

機率爲 $\frac{C_1^5 \times 8!}{9!} = \frac{5}{9}$．

【類題 11】

投擲一均勻的硬幣 10 次，求恰在第 10 次出現第 3 次正面的機率．

Ans：$\frac{9}{256}$

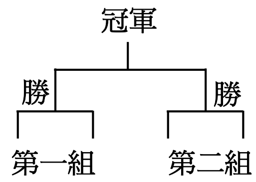
【詳解】

題意即前面 9 次出現 2 次正面．

機率為 $\frac{C^9_2}{2^{10}}=\frac{36}{1024}=\frac{9}{256}$ ．

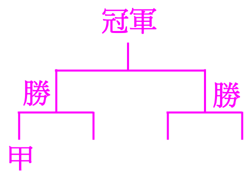
【例題 12】

某棒球比賽有實力完全相當的甲乙丙丁四隊參加，先將四隊隨機抽籤分成兩組比賽，兩組的勝隊再參加冠亞軍決賽．如圖：根據過去的紀錄，所有隊伍比賽時各隊獲勝的機率均為 0.5 ．則冠亞軍決賽由甲、乙兩隊對戰的機率為何？【96 指乙】



Ans： $\frac{1}{6}$

【詳解】

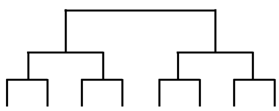


先將甲排入，乙在第一場比賽不遇到甲的機率為 $\frac{2}{3}$，

故所求機率為 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ ．

【類題 12】

某棒球比賽有甲乙丙丁…等八隊參加，先將八隊隨機抽籤決定賽程如圖：若甲乙是其中實力最好的兩隊(與其他隊比賽一定獲勝），則冠亞軍決賽由甲、乙兩隊對戰的機率為何？



Ans： $\frac{4}{7}$

【詳解】

先將甲排入，兩組中乙必須與甲在不同組，

其機率為 $\frac{4}{7}$ ．

lt99ok232 重要精選考題

基礎題 ▶▶▶

1. 擲一公正的骰子三次，求下列各事件的機率：

(1) 點數愈擲愈大的機率．

(2) 三次點數皆不同的機率．

(3) 恰好有兩次點數相同的機率．

(4) 三次點數的和爲 **8** 的機率．

Ans：(1) $\frac{5}{54}$，(2) $\frac{5}{9}$，(3) $\frac{5}{12}$，(4) $\frac{7}{72}$

【詳解】

樣本空間的樣本點有 $n(S)=6^3=216$。

(1) A＝{(1，2，3)，(1，2，4)，(1，2，5)，(1，2，6)，
(1，3，4)，(1，3，5)，(1，3，6)，(1，4，5)，
(1，4，6)，(1，5，6)，(2，3，4)，(2，3，5)，
(2，3，6)，(2，4，5)，(2，4，6)，(2，5，6)，
(3，4，5)，(3，4，6)，(3，5，6)，(4，5，6)}

故 $p(A)=\frac{C_3^6}{6^3}=\frac{20}{216}=\frac{5}{54}$。

(2) 第一次有 6 個不同的點數，第二次有 5 個不同的點數，

第三次有 4 個不同的點數，故 $p(B)=\frac{6\times5\times4}{6^3}=\frac{5}{9}$。

(3) $p(C)=\frac{3\times6\times5}{6^3}=\frac{5}{12}$

(4) 分組：
(6，1，1)，(5，2，1)，(4，3，1)，(4，2，2)，(3，3，2)，

$p(D)=\frac{3+6+6+3+3}{6^3}=\frac{7}{72}$。

2. 金先生在提款時忘了帳號密碼，但他還記得密碼的四位數字中，有兩個 **3**，一個 **8**，一個 **9**，於是他就用這四個數字隨意排成一個四位數輸入提款機嘗試．請問他只試一次就成功的機率是多少?

Ans：$\frac{1}{12}$

【詳解】

密碼的可能性有 $\frac{4!}{2!}=12$，

故他只試一次就成功的機率是 $\frac{1}{12}$。

3. 四人同時玩「剪刀、石頭、布」的遊戲一次，求不分勝負的機率．

Ans：$\frac{13}{27}$

【詳解】

不分勝負表示共出了三種，

其中恰有二人相同，或三人出同一種，故

$p=\frac{C_2^4\times3\times2+3}{3^4}=\frac{6\times3\times2+3}{3^4}=\frac{3\times13}{81}=\frac{13}{27}$。

4. 袋中有七個相同的球，分別標示 1 號，2 號，…，7 號．若自袋中隨機一次取出四個球，求取出之球的標號和爲奇數的機率．

Ans：$\frac{16}{35}$

【詳解】

1 奇 3 偶，或 3 奇 1 偶時，其和爲奇數，

故標號和爲奇數的機率爲

$p=\frac{C_1^4\times C_3^3+C_3^4\times C_1^3}{C_4^7}=\frac{4+12}{35}=\frac{16}{35}$。

5. 設 A, B 爲樣本空間 S 中的二事件，且 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{3}, P(A\cup B)=p,$

求 p 值的範圍．

Ans：$\frac{1}{2}\le p\le\frac{5}{6}$

【詳解】

當 $B\subset A$ 時，$p(A\cup B)=p(A)=\frac{1}{2}$ 爲最小，

當 $B\cap A=\varnothing$ 時，$p(A\cup B)=p(A)+p(B)=\frac{5}{6}$ 爲最大，

故$\frac{1}{2}\leqq p\leqq\frac{5}{6}$。

6. 十張分別標以1, 2, ⋯, 10的卡片，任意分成兩疊，每疊各五張，求1, 2, 3, 4四張中，每疊各有兩張的機率．

Ans：$\frac{10}{21}$

【詳解】

$p=\frac{C_2^4\times C_3^6\div 2}{C_5^{10}}=\frac{6\times 20\div 2}{252}=\frac{10}{21}$。

7. 試選出$P_1=P_2$的選項：

(1) P_1表連續投擲一個公正骰子3次，每次都出現6點的機率；
P_2表一次投擲三個公正骰子，同時出現3個6點的機率．

(2) 同時投擲2個公正骰子一次，P_1表出現一個3點一個4點的機率；
P_2表兩個骰子都出現3點的機率．

(3) P_1表投擲2個均勻硬幣時，恰好出現1個正面的機率；
P_2表投擲4個均勻硬幣時，恰好出現2個正面的機率．

(4) 連續投擲一公正硬幣5次，P_1表擲出「正正正正正」的機率；
P_2表擲出「正正正正反」的機率．

Ans：(1)(4)

【詳解】

(1) $P_1=P_2=\frac{1}{216}$。

(2) $P_1=\frac{2}{36}$，$P_2=\frac{1}{36}$。

(3) $P_1=\frac{2}{4}$，$P_2=\frac{C_2^4}{2^4}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$。

(4) $P_1=P_2=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$。

進階題

8. 大小不同之鞋 **6** 雙，任取其中 **4** 隻，求

(1) 4 隻均不成雙的機率．

(2) 4 隻恰有 **2** 隻成雙的機率．

Ans：(1) $\frac{16}{33}$，(2) $\frac{16}{33}$

【詳解】

(1) p＝$\frac{C_4^6\times 2^4}{C_4^{12}}=\frac{15\times 16}{495}=\frac{16}{33}$。

(2) p＝$\frac{C_1^6\times C_2^5\times 2^2}{C_4^{12}}=\frac{6\times 10\times 4}{495}=\frac{16}{33}$

9. **彩票公司每天開獎一次，從**1, 2, 3**三個號碼中隨機開出一個．開獎時，如果開出的號碼和前一天相同，就要重開，直到開出與前一天不同的號碼為止．如果在第一天開出的號碼是 3，則在第五天開出號碼同樣是 3 的機率是多少?**

Ans：$\frac{3}{8}$

【詳解】

S＝{(1，2，1，2)，(1，2，1，3)，((1，2，3，1)，(1，2，3，2)，
(1，3，1，2)，(1，3，1，3)，(1，3，2，1)，(1，3，2，3)，
(2，1，2，1)，(2，1，2，3)，(2，1，3，1)，(2，1，3，2)，
(2，3，1，2)，(2，3，2，3)，(2，3，2，1)，(2，3，2，3))。

p＝$\frac{6}{2^4}=\frac{3}{8}$。

10. **甲、乙兩人各擲一均勻骰子，約定如下：乙得 6 點時，乙就贏；兩人同點時（非 6 點），甲贏；其他情形，則以點數多者為贏．求甲贏的機率．**

Ans：$\frac{5}{9}$

【詳解】

S＝{(1，1)，(1，2)，(1，3)，(1，4)，(1，5)，(1，6)，
(2，1)，(2，2)，(2，3)，(2，4)，(2，5)，(2，6)，
(3，1)，(3，2)，(3，3)，(3，4)，(3，5)，(3，6)，
(4，1)，(4，2)，(4，3)，(4，4)，(4，5)，(4，6)，
(5，1)，(5，2)，(5，3)，(5，4)，(5，5)，(5，6)，
(6，1)，(6，2)，(6，3)，(6，4)，(6，5)，(6，6)}。

由上表知

p(甲贏)＝$\frac{6+5+4+3+2}{6^2}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$。

11.袋中有七個白球，若干個黑球．今從袋中一次取出兩個球，已知此兩球同為白球的機率是 $\frac{7}{22}$，請問袋中有幾個黑球?

Ans：5 個

【詳解】

設黑球有 x 個，則

$$\frac{C_2^7}{C_2^{x+7}}=\frac{7}{22}$$

$$\Rightarrow \frac{21}{\frac{(x+7)(x+6)}{2}}=\frac{7}{22}$$

$\Rightarrow (x+7)(x+6)=132=12\times 11$

$\Rightarrow x=5$。

12. 袋中有三個一樣大小的球，分別標示 10 分、20 分、30 分．重複自袋中取出一球後放回，記錄得分並累加，其中取出各球之機率皆相等．

(1) 求抽三次後總分為 60 分的機率．

(2) 遊戲「過三十」的規則是重複抽球，直到總得分大於或等於 30 分後停止，總得分恰為 30 分者輸，超過 30 分者贏．求贏得此遊戲之機率．

Ans：(1) $\frac{7}{27}$，(2) $\frac{11}{27}$

【詳解】

(1) 分為 30＋20＋10 與 20＋20＋20 兩種，

$p=\frac{3!+1}{3^3}=\frac{7}{27}$。

(2) 以 1 代表 10，

S＝{(1，1，2)，(1，1，3)，(1，3，1)，(1，3，2)，

(1，3，3)，(2，2，1)，(2，2，2)，(2，2，3)，(2，3，1)

(2，3，2)，(2，3，3)，……其餘為輸}

故 p(贏)＝$\frac{11}{36}$。

13. 不透明箱中置有編號分別為1、2、3、6、8的球各一顆．同時自箱中隨機取出三顆球，則此三球編號之和大於14的機率為下列哪一個選項? 【99 指甲】

(1) $\frac{1}{5}$ **，(2)** $\frac{3}{10}$ **，(3)** $\frac{2}{5}$ **，(4)** $\frac{1}{2}$ **，(5)** $\frac{3}{5}$ **．**

Ans：(2)

【詳解】

必選到 6 與 8，故 p＝$\dfrac{C_1^3}{C_2^5}=\dfrac{3}{10}$ 。

14. 一袋中有紅球 5 個，白球 n 個（$n\geq 2$）．已知選球的機會均等，由袋中任意選出 2 球，若 2 球同色機率爲 $P(n)$，試問

(1) $P(3)$是多少？

(2) 若 $P(n)<\dfrac{1}{2}$，求最大的 n 值．

Ans：(1) $\dfrac{13}{28}$ ，(2) 8

【詳解】

(1) P(3)＝$\dfrac{C_2^5+C_2^3}{C_2^8}=\dfrac{10+3}{28}=\dfrac{13}{28}$ 。

(2) P(n)＝$\dfrac{C_2^5+C_2^n}{C_2^{n+5}}=\dfrac{10+\dfrac{n(n-1)}{2}}{\dfrac{(n+5)(n+4)}{2}}=\dfrac{20+n^2-n}{(n+4)(n+5)}<\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{2n^2-2n+40-(n^2+9n+20)}{2(n+4)(n+5)}<0$

$\Rightarrow (n^2-11n+20)(n+4)(n+5)<0$

$\Rightarrow n^2-11n+20<0$

$\Rightarrow n\leqq 8$ 。

15. 從 1 到 10^4 的自然數中任取一數，試求此數既不是完全平方數，又不是完全立方數的機率．

Ans：$\dfrac{9883}{10000}$

【詳解】

設 A 表平方數，B 表立方數，

因 $21^3=9261$，$22^3=10648$，$4^6=4096$，$5^6=15625$，故

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=100+21-4=117$，

既不是完全平方數，又不是完全立方數的機率爲

$\dfrac{10000-117}{10000}=\dfrac{9883}{10000}$。

16. **箱中有編號分別爲 0,1,2,　,9 的十顆球。隨機抽取一球，將球放回後，再隨機抽取一球。請問這兩球編號相減的絕對值爲下列哪一個選項時，其出現的機率最大？　(1) 0，(2) 1，(3) 4，(4) 5，(5) 9.　　　　[學測 101]**

Ans：(2)

【詳解】

設第一次取號爲 x_1，第二次取號爲 x_2

$\lvert x_1-x_2\rvert$	0	1	4	5	9
情形	(0,0) (1,1) (2,2) (3,3) (4,4) ⋮ (9,9)	(0,1) (1,0) (8,9) (1,2) (2,1) (9,8) (2,3) (3,2) (3,4) (4,3) (4,5) (5,4) (5,6) (6,5) (6,7) (7,6) (7,8) (8,7)	(0,4) (4,0) (1,5) (5,1) (2,6) (6,2) (3,7) (7,3) (4,8) (8,4) (5,9) (9,5)	(0,5) (5,0) (1,6) (6,1) (2,7) (7,2) (3,8) (8,3) (4,9) (9,4)	(0,9) (9,0)
機率	$\dfrac{10}{10\times10}$	$\dfrac{18}{10\times10}$	$\dfrac{12}{10\times10}$	$\dfrac{10}{10\times10}$	$\dfrac{2}{10\times10}$

∴　兩球編號相減的絕對值爲1的機率最大，故選(2)

17. **坐標空間中，在六個平面 $x=\dfrac{14}{13}$，$x=\dfrac{1}{13}$，y＝1，y＝−1，z＝−1 及 z＝−4 所圍成的長方體上隨機選取兩個相異頂點。若每個頂點被選取的機率相同，則選到兩個頂點的距離大於 3 之機率爲 $\dfrac{㉜}{㉝}$。（化成最簡分數）　　　　[學測 101]**

Ans：(32) 3，(33) 7

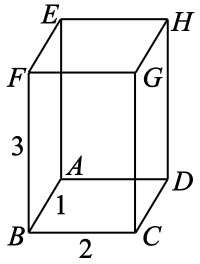
【詳解】

將平面組成的長方體坐標列出爲

$A\left(\dfrac{1}{13},-1,-4\right)$、$B\left(\dfrac{14}{13},-1,-4\right)$、$C\left(\dfrac{14}{13},1,-4\right)$、$D\left(\dfrac{1}{13},1,-4\right)$

$E\left(\dfrac{1}{13},-1,-1\right)$、$F\left(\dfrac{14}{13},-1,-1\right)$、$G\left(\dfrac{14}{13},1,-1\right)$、$H\left(\dfrac{1}{13},1,-1\right)$

其中 $\overline{BF}=3$，$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=2$



兩頂點距離大於3者有

$\overline{AF}$、$\overline{GD}$、$\overline{EB}$、$\overline{HC}$、$\overline{FC}$、$\overline{GB}$、$\overline{ED}$、$\overline{HA}$、

$\overline{FD}$、$\overline{HB}$、$\overline{EC}$、$\overline{AG}$，共12種

故 $P=\dfrac{12}{C_2^8}=\dfrac{3}{7}$