數學 4

進階講義

拋物線

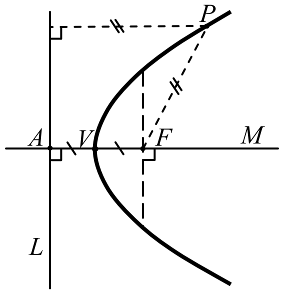
淡水商工・姚盈孜　老師

信望愛文教基金會

14-1-1~14-1-4　抛物線

定理敘述

1. 抛物線的定義：



平面上，給定直線 L 及直線 L 外一點 F，

則滿足到直線 L 與到點 F 距離相等的所有點

形成的圖形稱為抛物線。

即抛物線上的點 P 滿足 $d(P,L)=\overline{PF}$。

2. 抛物線的標準式：

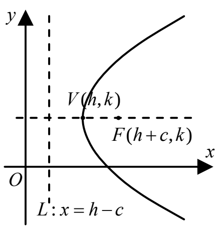
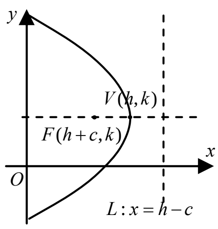
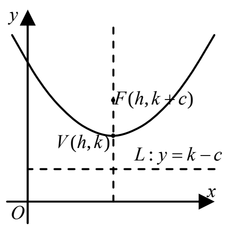
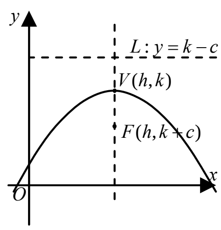
(1) 左右型：焦點為 $F(c,0)$，準線為 $L:x+c=0$，則抛物線方程式為 $\Gamma:y^2=4cx$。

(2) 上下型：焦點為 $F(0,c)$，準線為 $L:y+c=0$，則抛物線方程式為 $\Gamma:x^2=4cy$。

其中，$c>0$，開口朝上或右；$c<0$，開口朝左或下，而頂點座標為 $(0,0)$，焦距為 $|c|$。

3. 抛物線的平移：

將 $\Gamma_1:y^2=4cx$、$\Gamma_2:x^2=4cy$ 之圖形沿 (h,k) 平移，所得新圖形方程式為 $\Gamma_1':(y-k)^2=4c(x-h)$、$\Gamma_2':(x-h)^2=4c(y-k)$，整理如下：

<table>
<tr><td>抛物線的標準式</td><td colspan="2">$\Gamma_1':(y-k)^2=4c(x-h)$</td><td colspan="2">$\Gamma_2':(x-h)^2=4c(y-k)$</td></tr>
<tr><td>圖形</td><td>$c>0$
</td><td>$c<0$
</td><td>$c>0$
</td><td>$c<0$
</td></tr>
<tr><td>頂點</td><td colspan="2">(h,k)</td><td colspan="2">(h,k)</td></tr>
<tr><td>焦點</td><td colspan="2">$(h+c,k)$</td><td colspan="2">$(h,k+c)$</td></tr>
<tr><td>準線</td><td colspan="2">$x=h-c$</td><td colspan="2">$y=k-c$</td></tr>
<tr><td>對稱軸</td><td colspan="2">$y=k$</td><td colspan="2">$x=h$</td></tr>
<tr><td>焦距</td><td colspan="2">$|c|$</td><td colspan="2">$|c|$</td></tr>
</table>

4. 抛物線的一般式：

(1) 左右型：$x=ay^2+by+c$。

(2) 上下型：$y=ax^2+bx+c$。

5. 正焦弦長為焦距的 4 倍

定理證明或說明

1. 名詞介紹：

(1) 直線 L 稱為拋物線的準線，點 F 稱為拋物線的焦點。

(2) 過焦點 F 且與準線 L 垂直之直線 M 稱為對稱軸或簡稱為軸。

(3) 對稱軸與拋物線之交點 V 稱為頂點，焦點到頂點的距離 $\overline{VF}$ 稱為焦距。

(4) 拋物線上任兩點的連線稱為弦，過焦點的弦稱為焦弦，過焦點且與軸垂直的弦稱為正焦弦。

2. (1)左右型：

設 $P(x,y)$ 為拋物線上的一點，

因為 $d(P,L)=\overline{PF}$，可得 $|x+c|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，

平方後得 $x^2+2cx+c^2=x^2-2cx+c^2+y^2$，

所以 $y^2=4cx$。

(2)左右型：

設 $P(x,y)$ 為拋物線上的一點，

因為 $d(P,L)=\overline{PF}$，可得 $|y+c|=\sqrt{x+(y-c)^2}$，

平方後得 $y^2+2cy+c^2=x^2+y^2-2cy+c^2$，

所以 $x^2=4cy$。

3. 將 $\Gamma_1:y^2=4cx$、$\Gamma_2:x^2=4cy$ 之圖形沿 (h,k) 平移，則 x 用 $x-h$ 取代、y 用 $y-k$ 取代，因此新圖形方程式為 $\Gamma_1':(y-k)^2=4c(x-h)$、$\Gamma_2':(x-h)^2=4c(y-k)$

4. 將拋物線的標準式 $(y-k)^2=4c(x-h)$ 與 $(x-h)^2=4c(y-k)$ 展開後整理可得 $x=ay^2+by+c$ 與 $y=ax^2+bx+c$ 之形式。

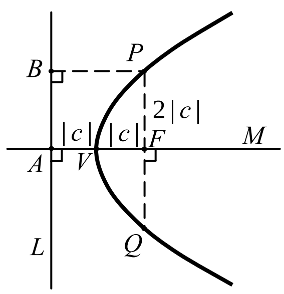
5. 設 $\overline{PQ}$ 為拋物線的正焦弦，則 $\overline{PQ}$ 垂直 M，

又 $\overline{PB}$、$\overline{FA}$ 垂直 L，可得四邊形 $AFPB$ 為矩形，

因為 P 點在拋物線上，得 $\overline{PB}=\overline{PF}$，

故矩形 $AFPB$ 為正方形，

而頂點 V 在拋物線上，得 $\overline{AV}=\overline{VF}=|c|$，



因此，$\overline{PQ}=2\overline{PF}=2\times2|c|=4|c|$。

關鍵字

拋物線、準線、焦點、焦距、頂點、對稱軸、焦弦、正焦弦

例題 1

試求以 $F(3,0)$ 為焦點，$L:x=-3$ 為準線的拋物線方程式。

Ans：

設拋物線上的點 $P(x,y)$，

因為 $d(P,L)=\overline{PF}$，可得 $|x+3|=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

平方後整理可得拋物線方程式 $y^2=12x$。

也可利用拋物線左右型的標準式，

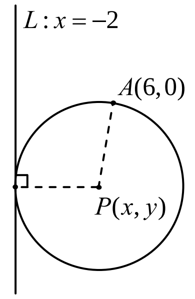
因為 $d(P,L)=2|c|$，因此 $c=3$

故方程式為 $y^2=12x$。

例題 2

試求平面上所有過點 $A(6,0)$ 且與直線 $L:x=-2$ 相切的圓之圓心所形成的圖形並求其方程式。

Ans：



如右圖，設圓心為點 P，

因為圓過 A 點且與 L 相切，故 $d(P,L)=\overline{PA}$，

因此圖形是以 $A(6,0)$ 為焦點，$L:x=-2$ 為準線的拋物線，

可設圓心坐標 $P(x,y)$，利用 $d(P,L)=\overline{PA}$，

得 $|x+2|=\sqrt{(x-6)^2+y^2}$，整理後得拋物線方程式 $y^2=16x-32$，

也可利用拋物線平移後的標準式，

因為頂點在 A 和 L 的中間，得頂點座標為 $(2,0)$，

而 $c=4$，故方程式為 $y^2=16(x-2)$。

例題 3

試求拋物線 $y^2-4x-2y-7=0$ 的頂點、焦點、準線、對稱軸、正焦弦長。

Ans：

將方程式 $y^2-4x-2y-7=0$ 配方後得 $(y-1)^2=4(x+2)$，

可知頂點為 $(-2,1)$、$c=1$，且拋物線開口朝右，

故焦點坐標為 $(-1,1)$，準線為 $x=-3$，對稱軸為 $y=1$，正焦弦長為 4。

例題 4

試根據下列條件，求拋物線的方程式：

(1)頂點 $A(1,3)$，焦點 $F(0,3)$。

(2)焦點 $(-2,1)$，準線平行 y 軸，正焦弦長為 8。

(3)正焦弦的兩端點為 $(2,3)$、$(2,-1)$。

(4)過 $(-7,0)$、$(-4,1)$、$(-8,-1)$ 三點且對稱軸平行 x 軸。

Ans：

(1) 由頂點在焦點右邊，可知拋物線開口朝左，且 $c=-\overline{AF}=-1$，

故拋物線方程式為 $(y-3)^2=-4(x-1)$

(2) 由正焦弦長為 8，可知 $c=2$ 或 -2，

當 $c=2$ 時，頂點坐標為 $(-4,1)$，

當 $c=-2$ 時，頂點坐標為 $(0,1)$，

故拋物線方程式為 $(y-1)^2=8(x+4)$ 或 $(y-1)^2=-8x$。

(3) 由正焦弦的兩端點為 $P(2,3)$、$Q(2,-1)$，

可得焦點坐標為 P、Q 之中點 $(2,1)$，且 $4|c|=\overline{PQ}=4$，得 $c=\pm1$，

當 $c=1$ 時，頂點坐標為 $(1,1)$，

當 $c=-1$ 時，頂點坐標為 $(3,1)$，

故拋物線方程式為 $(y-1)^2=4(x-1)$ 或 $(y-1)^2=-4(x-3)$。

(4) 可用左右型的一般式假設方程式為 $x = ay^2 + by + c$ ，

將 $(-7,0)$ 、 $(-4,1)$ 、 $(-8,-1)$ 三點代入可解得 $a = 1$ 、 $b = 2$ 、 $c = -7$ ，

故拋物線方程式為 $x = y^2 + 2y - 7$ 。

例題 5

若 F 為拋物線 $y^2 = 4x$ 的焦點， $A(3,3)$ ， P 為拋物線上的動點，試求 $\overline{AP} + \overline{PF}$ 的最小值。

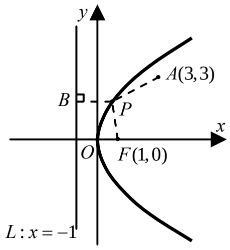
Ans：

如右圖，設 L 為拋物線的準線， B 為 P 到 L 最近的點，

因為 P 為拋物線上的點，故 $\overline{PF} = \overline{PB}$ ，

因此當 A 、 P 、 B 共線時， $\overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PB}$ 有最小值，

且此時 $\overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB} = 4$ 。



例題 6

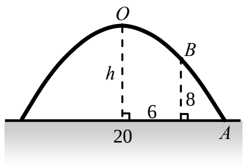
如右圖，有一拋物線形狀的拱門，已知拱門底部的寬度為 20 公尺，距中心線 6 公尺處的高度為 8 公尺，試求此拱門的高度。

Ans：

如圖，令最高點 O 為原點，拱門高度為 h ，

則圖形為一開口朝下的拋物線，可設其方程式為 $x^2 = 4cy$

而 A 點坐標為 $(10,-h)$ 、 B 點坐標為 $(6,-(h-8))$ ，



將 A 、 B 兩點代入拋物線方程式得 $\begin{cases} 100 = -4ch \\ 64 = -4c(h-8) \end{cases}$ ，

兩式相除解方程式後得 $h = \dfrac{25}{2}$ 。

溫故知新

習題 1

試求以 $F(1,2)$ 為焦點， $L: y=-2$ 為準線的拋物線方程式。

習題 2

試求平面上所有過點 $A(1,5)$ 且與直線 $L: x=3$ 相切的圓之圓心所形成的圖形並求其方程式。

習題 3

試求拋物線 $x^2-2x+8y+9=0$ 的頂點、焦點、準線、對稱軸、正焦弦長。

習題 4

試根據下列條件，求拋物線的方程式：

(1)頂點 $A(1,3)$ ，焦點 $F(1,4)$ 。

(2)焦點 $(1,-1)$ ，準線平行 x 軸，正焦弦長為 4 。

(3)正焦弦的兩端點為 $(-1,1)$ 、 $(7,1)$ 。

(4)過 $(0,1)$ 、 $(1,0)$ 、 $(2,1)$ 三點且準線平行 x 軸。

習題 5

若 F 為拋物線 $x^2=-8y$ 的焦點， $A(2,-4)$ ， P 為拋物線上的動點，試求 $\overline{AP}+\overline{PF}$ 的最小值。

習題 6

有一拋物線形狀的拱橋，底部寬度為 8 公尺，若水面上升 2 公尺後，露出水面的拱橋寬剩 6 公尺，試求此拱橋在水面上升 2 公尺後露出來的高度。

習題 7 【學測 97】

已知坐標平面上圓 $O_1:(x-7)^2+(y-1)^2=144$ 與 $O_2:(x+2)^2+(y-13)^2=9$ 相切，且此兩圓均與直線 $L: x=-5$ 相切。若 Γ 為以 L 為準線的拋物線，且同時通過 O_1 與 O_2 的圓心，則 Γ 的焦點坐標為__________。（化為最簡分數）

習題 8 【學測 98】

假設 Γ_1 為坐標平面上一開口向上的拋物線，其對稱軸為 $x=\frac{-3}{4}$ 且焦距（焦點到頂點的距離）為 $\frac{1}{8}$。若 Γ_1 與另一拋物線 $\Gamma_2: y=x^2$ 恰交於一點，則 Γ_1 的頂點之 y 坐標為＿＿＿＿＿＿＿＿。（化為最簡分數）

習題 9 【學測 99】

坐標平面上給定點 $A(\frac{9}{4},2)$、直線 $L: y=-5$ 與拋物線 $\Gamma: x^2=8y$。以 $d(P,L)$ 表示點 P 到直線 L 的距離。若點 P 在 Γ 上變動，則 $\left|d(P,L)-\overline{AP}\right|$ 之最大值為＿＿＿＿＿＿＿＿。

解答與解析

習題 1：$(x-1)^2=8y$

習題 2：$(y-5)^2=-4(x-2)$

習題 3：頂點 $(1,-1)$、焦點 $(1,-3)$、準線 $y=1$、對稱軸 $x=1$、正焦弦長 8

習題 4：

(1) $(x-1)^2=4(y-3)$

(2) $(x-1)^2=4(y+2)$ 或 $(x-1)^2=-4y$

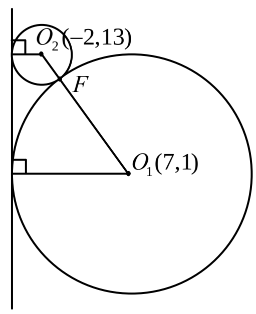
(3) $(x-1)^2=8(y-1)$ 或 $(x-5)^2=-8(y-1)$

(4) $y=x^2-2x+1$

習題 5：6

習題 6：$\frac{18}{7}$

習題 7：$(-\frac{1}{5},\frac{53}{5})$



如右圖，利用拋物線的定義，

可知兩圓的切點 F 即為拋物線的焦點，

而$\overline{FO_1}:\overline{FO_2}=3:12=1:4$，

故由分點坐標公式可知$F(\frac{-2\times4+7\times1}{4+1},\frac{13\times4+1\times1}{4+1})=(-\frac{1}{5},\frac{53}{5})$。

習題 8：$\frac{9}{8}$

因為對稱軸為$x=\frac{-3}{4}$，可設頂點座標為$(-\frac{3}{4},k)$，

而焦距為$\frac{1}{8}$，得$c=\frac{1}{8}$，故拋物線方程式為$\Gamma_1:(x+\frac{3}{4})^2=\frac{1}{2}(y-k)$，

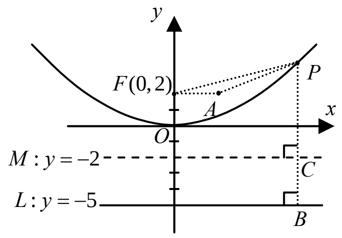
展開後整理得$16x^2+24x-8y+9+8k=0$

由Γ_1與$\Gamma_2:y=x^2$恰交一點，可知方程組$\begin{cases}16x^2+24x-8y+9+8k=0\\ y=x^2\end{cases}$只有一解，

將 $y=x^2$代入$16x^2+24x-8y+9+8k=0$得$8x^2+24x+9+8k=0$只有一解，

故判別式$D=24^2-4\times8\times(9+8k)=0$，解方程式得$k=\frac{9}{8}$。

習題 9：$\frac{21}{4}$



由方程式$\Gamma:x^2=8y$，

可知拋物線的頂點$(0,0)$，$c=2$，開口朝上，

如右圖，設拋物線焦點為$F(0,2)$，準線$M:y=-2$，

P到L、M的垂足分別為B、C，

則$d(P,L)=\overline{PB}=\overline{PC}+3=\overline{PF}+3$，

因此$\left|d(P,L)-\overline{AP}\right|=\left|\overline{PF}+3-\overline{AP}\right|=\left|\overline{PF}-\overline{AP}+3\right|$，

若F、A、P不共線，則由三角形兩邊差小於第三邊可知$\left|\overline{PF}-\overline{AP}\right|<\overline{FA}$，

而當F、A、P共線時，$\left|\overline{PF}-\overline{AP}\right|=\overline{FA}$，

故$\left|\overline{PF}-\overline{AP}+3\right|\le\overline{FA}+3=\frac{9}{4}+3=\frac{21}{4}$。

延伸閱讀

1. 拋物線的光學性質：

   從焦點射出的光線經過拋物線反射後會平行對稱軸。

2. 拋物線的參數式：

   (1)左右型：$(y-k)^2=4c(x-h)$ 的參數式為 $\begin{cases} x=h+ct^2 \\ y=k+2ct \end{cases}, t\in R$。

   (2)上下型：$(x-h)^2=4c(y-k)$ 的參數式為 $\begin{cases} x=h+2ct \\ y=k+ct^2 \end{cases}, t\in R$。

3. 拋物線的極坐標方程式：$r=\dfrac{p}{1-\cos\theta}$。