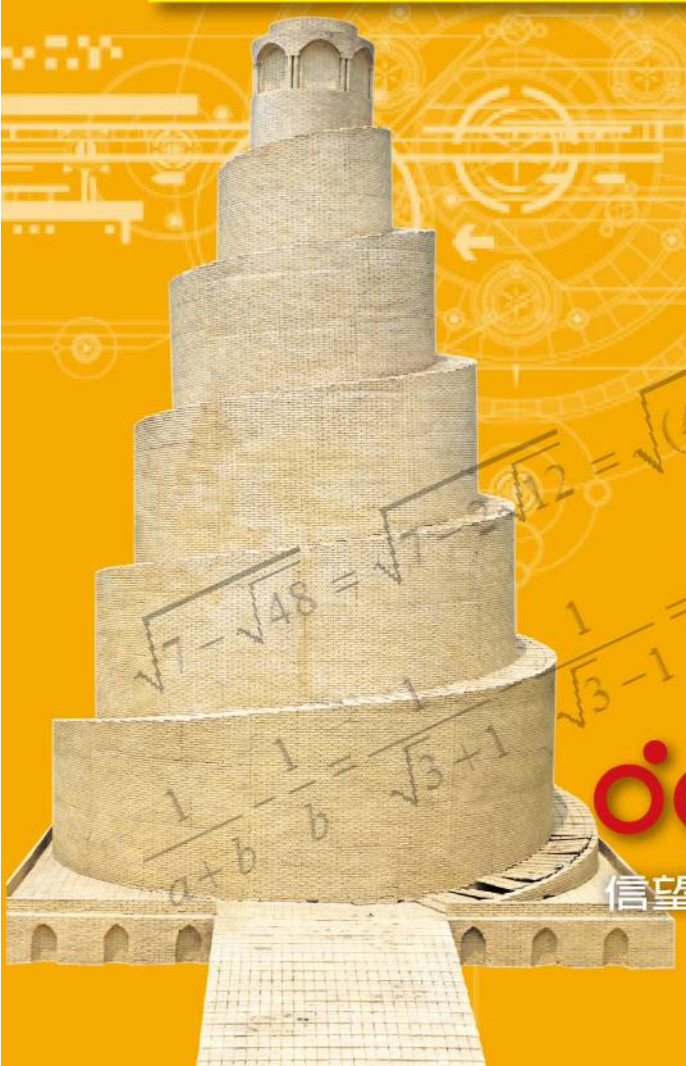
數學 基礎講義

平面向量的表示法

信望愛文教基金會．數學種子教師團隊



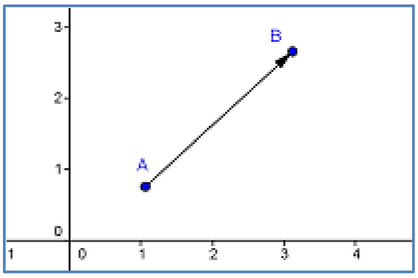
信望愛文教基金會

平面向量的表示法

基本定義

有向線段（向量的幾何表示法）

假設只給定線段的兩端點為A及B時，這個線段可以表示為 $\overline{AB}$ 或是 $\overline{BA}$ ，如果我們除了線段長度之外還想要強調其方向性，就會在線段的符號再加上箭頭表示為$\overrightarrow{AB}$或是 $\overrightarrow{BA}$。其中$\overrightarrow{AB}$表示A為始點、B為終點，如下圖所示：



有向線段$\overrightarrow{AB}$的長度及為線段AB的長度即$|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$

向量的相等

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$，且$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{CD}$方向相同

向量的座標表示法

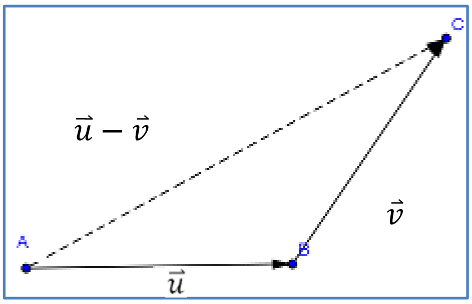
設 O 為原點，我們將 $\overrightarrow{AB}$的始點 A 移至與 O 點重合，這時終點 B 的座標 (a,b) 可以拿來表示 $\overrightarrow{AB}$，記為 $\overrightarrow{AB}=(a,b)$，且 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2+b^2}$

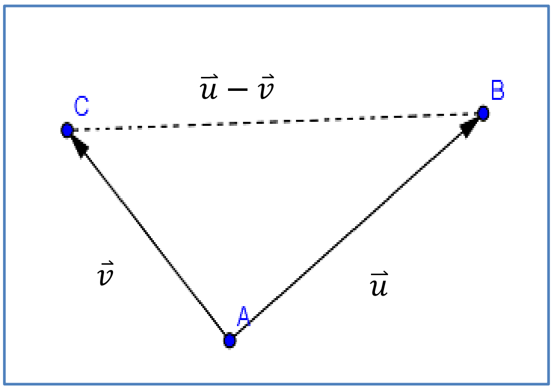
註：設 $\overrightarrow{AB}=(a,b)$，$\overrightarrow{CD}=(c,d)$ 則$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ $a=c$，$b=d$

向量的加減法與係數乘法

向量加法：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$。令$\overrightarrow{AB}=\vec{u}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{v}$（如下方左圖）

向量減法：$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}$。令$\overrightarrow{AB}=\vec{u}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{v}$（如下方右圖）





向量的係數乘法

對於任意向量$\vec{u}$，$r\in R$，則$r\cdot\vec{u}$的定義如下:

若$r>0$，則$r\cdot\vec{u}$為一方向與$\vec{u}$相同，長度為$\vec{u}$的r倍之向量

若$r<0$，則$r\cdot\vec{u}$為一方向與$\vec{u}$相反，長度為$\vec{u}$的$|r|$倍之向量

係數乘法推廣

1.若 A、B、C 為平面上相異三點，則 A、B、C 三點共線$\Leftrightarrow$存在一個非零實數 r 使得$\overrightarrow{AB}$=r$\overrightarrow{AB}$

2.對於任意兩非零向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$，且三點不共線，則$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow$存在一個非零實數 r 使得 $\overrightarrow{AB}$=r$\overrightarrow{AB}$

3.設$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$不平行，則任何位於$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{CD}$決定的平面上的向量$\vec{u}$一定可以$\overrightarrow{AB}$及$\overrightarrow{CD}$的線性組合表示之 $\Rightarrow$ $\vec{u}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{CD}$

向量的加法、減法，係數乘法以坐標表示

設$\vec{u}=(a_1, b_1)$ $\vec{v}=(a_2, b_2)$ $r\in R$

(1) $\vec{u}+\vec{v}=(a_1+a_2, b_1+b_2)$ (2) $\vec{u}-\vec{v}=(a_1-a_2, b_1-b_2)$

(3) $r\cdot\vec{u}=(ra_1,rb_1)$ (4) 若$\vec{u}//\vec{v}$，且$b_1b_2\neq 0$，則 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$

分點公式

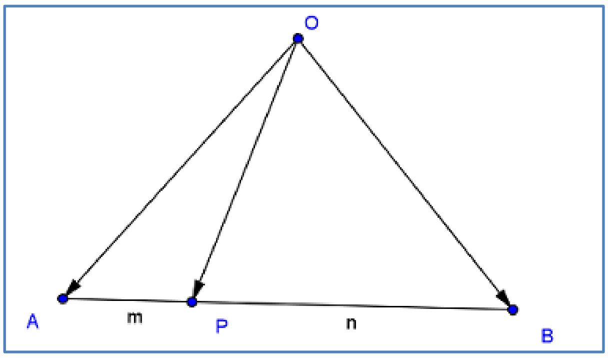
分點公式

設P點為$\overline{AB}$上任一點使得$\overline{PA}:\overline{PB}=m:n$，則位於平面上任意一點$O$

$\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$

Proof

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}=\ \overrightarrow{AP}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$$
$$=\ \overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$
$$=(1-\frac{m}{m+n})\ \overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$$
$$=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$$



分點坐標公式

坐標平面上兩點坐標$A(a_1, b_1)$ ，$B(a_2, b_2)$，P為$\overline{AB}$上任一點，若$\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，

則P 點坐標為$(\frac{na_1+ma_2}{m+n}, \frac{nb_1+mb_2}{m+n})$

三點共線判別法

1.若 A、B、C 為平面上相異三點，則 A、B、C 三點共線 $\Leftrightarrow$ 存在一個非零實數 r 使得$\overrightarrow{AB}=r\overrightarrow{AB}$

2.設 O 為坐標平面上任意一點，A，B，P 三點共線 $\Leftrightarrow$ 存在兩實數 α，β，使得$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，且$\alpha+\beta=1$

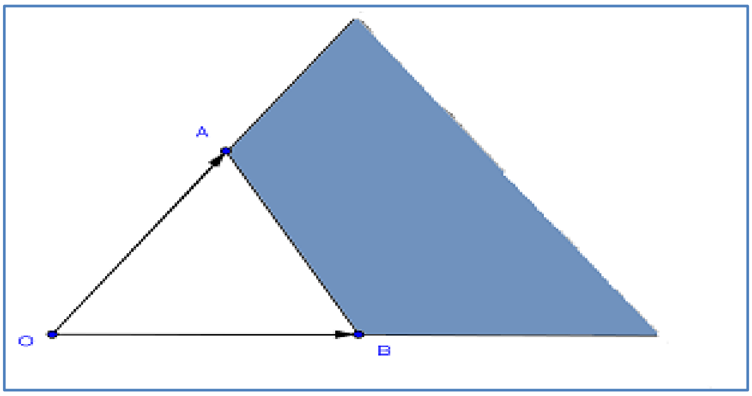
推廣

設$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，且$\alpha$，$\beta>0$，則

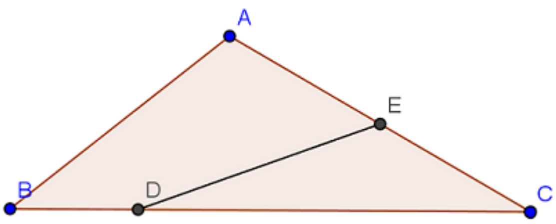
1.$\alpha+\beta<1$，則 P 點落在 ΔOAB 之內部

2.$\alpha+\beta=1$，則 P 點落在 $\overline{AB}$ 上

3.$\alpha+\beta>1$，則P點落在 $\overline{AB}$ 外之陰影區



小試身手

例題 1	設$\vec{a}=(2x+3y,x-2y+1)$ $\vec{b}=(x+y-2,3x+y-1)$，若$\vec{a}=\vec{b}$，則數對(x,y)=
例題 2	已知 A B C 為不共線 3 點，若 $3x\overrightarrow{AB}+(y+3)\overrightarrow{BC}+(4x-5)\overrightarrow{CA}=\vec{0}$其中 $x,y\in R$ 求數對(x,y)
例題 3	如右圖所示，D 在 ΔABC 之邊 $\overline{BC}$ ，且 $\overline{CD}=2\overline{BD}$ E 為 $\overline{AC}$ 之中點，若將$\overrightarrow{ED}$改寫為$\overrightarrow{ED}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$ 其中 r, s 皆為實數，則 $r+s$=? 
例題 4	在坐標平面上的 ΔABC 中，P 為 $\overline{BC}$ 之中點，Q 在 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{AQ}=2\overline{QC}$ 已知$\overrightarrow{PA}=(4,3)$，$\overrightarrow{PQ}=(1,5)$，則$\overrightarrow{BC}$=？
例題 5	設 I 為 ΔABC 的內心，若 $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}$且 ΔABC 周長為 18，則 ΔABC 之面積為？
例題 6	ΔABC 中，$A(1,2)$ $B(4,2)$ $C(1,-2)$ 且頂點$\angle A$ 的內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，則 D 點坐標為何？

解答與解析

例題 1：$\vec{a}=\vec{b}$，$2x+3y=x+y-2$ 且 $x-2y+1=3x+y-1$

$\Rightarrow\begin{cases}x+2y=-2\\2x-3y=2\end{cases}$ 解得 $x=10,y=-6$

數對$(x,y)=(10,6)$

例題 2：$3x\overrightarrow{AB}+(y+3)(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-(4x-5)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$(3x-y-3)\overrightarrow{AB}+(-4x+y+8)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\because \overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{AC}$不平行

$\therefore 3x-y-3=0$，$-4x+y+8=0$

解之得 $x=5, y=12$

例題 3：$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

$r+s=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

例題 4：$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{PC}$

在 ΔAPC 中，由分點公式可得$\overrightarrow{PQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=3\overrightarrow{PQ}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PA}=3(1,5)-(4,3)=(-1,12)$

例題 5：$2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Delta BIC : \Delta AIC : \Delta AIB = 2 : 3 : 4 = a : b : c$

$a = 4$，$b= 6$，$c = 8$

利用海龍公式可知 ΔABC 面積$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{9\times5\times3\times1}=3\sqrt{15}$

例題 6：$\overline{AB}=3$

$\overline{BC}=\sqrt{(4-1)^2+(2+2)^2}=5$

$\overline{AC}=4$

$\because \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{3}{4}$

$\therefore$ 利用分點公式可知 D 點坐標為$\left(\frac{3\times1+4\times4}{3+4},\frac{3\times(-2)+4\times2}{3+4}\right)=\left(\frac{19}{7},\frac{2}{7}\right)$